

Anno Scolastico 2023-2024

Classe: 1^a Sezione A

Materia: MATEMATICA

Docente: Dario Topini

PROGRAMMA SVOLTO

LIBRI IN ADOZIONE:

Algebra. blu, volume 1, Bergamini, Barozzi, Trifone, Zanichelli

Tutti i colori della matematica, volume geometria, Sasso, Zanone, Petrini

TRIMESTRE

PARTE A: ALGEBRA

1. I numeri naturali e interi relativi

- Concetto di numero naturale: operazioni e proprietà delle operazioni con i numeri naturali
- Concetto di numero relativo: operazioni e proprietà delle operazioni con i numeri relativi
- Le potenze e proprietà delle potenze
- Criteri di divisibilità, numeri primi, massimo comun divisore e minimo comune multiplo

2. I numeri razionali

- Concetto di numero razionale: frazioni e operazioni, proprietà, potenze ed espressioni
- Numeri decimali finiti, illimitati periodici, introduzione al concetto di numero reale.

3. Gli insiemi e la logica

- Insiemi e loro rappresentazione
- Sottoinsiemi
- Le operazioni tra insiemi: unione, intersezione, differenza, complementare, prodotto cartesiano
- Proprietà delle operazioni tra insiemi

- Insieme delle parti
- Gli insiemi come modello per risolvere problemi
- Proposizioni logiche, semplici e composte, enunciati aperti
- Connettivi logici e loro proprietà
- Congiunzione, disgiunzione inclusiva, implicazione e doppia implicazione; loro interpretazione insiemistica
- Tavole di verità ed equivalenza logica
- Quantificatori
- Negazione di una proposizione e di un enunciato aperto

4. Relazioni e funzioni

- Concetto di relazione tra due insiemi e in un insieme
- Rappresentazione e proprietà delle relazioni in un insieme
- Le relazioni d'equivalenza e d'ordine
- Definizione di funzione
- Funzioni biunivoche

PENTAMESTRE

ALGEBRA

5. Calcolo letterale: monomi e polinomi

- Introduzione al calcolo letterale
- I monomi
- Operazioni con monomi
- m.c.m. e M.C.D. tra monomi
- I polinomi
- Grado di un polinomio
- Principio di identità dei polinomi



- Operazioni con polinomi
- Prodotti notevoli
- Divisione tra polinomi
- La regola di Ruffini
- Il teorema del resto
- Il teorema di Ruffini

6. La scomposizione in fattori di un polinomio

- Polinomi riducibili e irriducibili
- Raccoglimento parziale e totale
- Scomposizione mediante prodotti notevoli
- Scomposizione di particolari trinomi di secondo grado
- Regola di Ruffini
- m.c.m. e M.C.D. tra polinomi

7. Le frazioni algebriche

- Nozioni fondamentali e CE
- Operazioni con le frazioni algebriche

8. Le equazioni lineari

- Le identità
- Le equazioni
- I principi di equivalenza
- Le equazioni numeriche intere
- Equazioni e problemi
- Le equazioni letterali intere
- Le equazioni fratte
- Le equazioni letterali fratte

9. Le disequazioni lineari

- Nozioni fondamentali sulle disequazioni
- Principi di equivalenza delle disequazioni
- Risoluzione di una disequazione lineare numerica intera
- Disequazioni letterali intere
- I sistemi di disequazioni
- Lo studio del segno di un prodotto
- Le disequazioni fratte

GEOMETRIA NEL PIANO EUCLIDEO

10. Nozioni fondamentali di geometria razionale

- Introduzione alla geometria razionale
- Postulati fondamentali
- Semirette, segmenti e poligoni
- Semipiani, angoli e poligoni
- Congruenza tra figure geometriche
- Confronto di segmenti e di angoli
- Orazioni con segmenti e angoli
- Lunghezza di un segmento, ampiezza di un angolo e area di una superficie

11. I triangoli

- Generalità sui triangoli
- Criteri di congruenza dei triangoli. Triangoli isosceli
- Classificazione dei triangoli rispetto agli angoli
- Le disuguaglianze nei triangoli

12. Rette parallele. Applicazione ai triangoli

- Teoremi fondamentali sulle rette parallele
- Applicazione ai triangoli

13. I quadrilateri

- Parallelogrammi e loro proprietà
- Parallelogrammi notevoli (rettangoli, rombi e quadrati)
- Trapezi
- Teorema del fascio di parallele

ESERCITAZIONI PER LE VACANZE ESTIVE

Classe 1^aA

Carissimo studente,

Per iniziare al meglio il prossimo anno ecco una serie di esercizi per riprendere gli argomenti svolti quest'anno. Le esercitazioni da svolgere durante le vacanze servono a tenere in esercizio la mente sui concetti appresi durante l'anno scolastico appena concluso, una sorta di Brain Training. Il consiglio è di diluire il lavoro da fare nei mesi di vacanze in modo da non concentrarlo solo all'inizio o alla fine di questo periodo. Solo così facendo vi assicurerete un buon allenamento che dia il più possibile i suoi frutti nel tempo e renda i concetti acquisiti più duraturi. Ti chiedo di svolgerli con attenzione e da solo.

Gli esercizi riguarderanno tutto il programma analitico degli argomenti svolti.

Teoria: ripassare tutti gli argomenti svolti quest'anno.

Esercizi per tutti: dalle schede allegate

Numeri razionali e reali	<ul style="list-style-type: none"> • Pag. 161: 6-7-9-11 • Pag. 162-163: 21-23-26-34-40 • Pag. 164-165: 55-56-1-2-7
Insiemi e logica	<ul style="list-style-type: none"> • Pag. 247: 1-2-5 • Pag. 248-249: 8-9-13-14-20-22-23-24 • Pag. 250-251: 26-27-28-3-5
Relazioni e funzioni	<ul style="list-style-type: none"> • Pag. 321: 1-2-5-6-8-11-12-13 • Pag. 322-323: 16-18-23-24-25-26-29-31-33 • Pag. 324-325: 38-1-2-4
Monomi e polinomi	<ul style="list-style-type: none"> • Pag. 435: 4-5-6 • Pag. 436-437: 15-19-24-26-29-31-33-35 • Pag. 438-439: 44-48-54-76-77



	<ul style="list-style-type: none">• Pag. 440-441: 83-84-2-6-8-11
Scomposizione in fattori di un polinomio	<ul style="list-style-type: none">• Pag. 491: 1-3-5-8-9-10-13-16-18-20-21• Pag. 492-493: 27-28-30-31-33-34-3-4-13
Frazioni algebriche	<ul style="list-style-type: none">• Pag. 533: 1-3-4-5-7-10-12• Pag. 534-535: 14-21-22-1-3
Equazioni lineari	<ul style="list-style-type: none">• Pag. 618-619: 1-2-6-7-9-15-16-17• Pag. 620-621: 29-32-36-41-42-48-51-54-64• Pag. 622-623: 72-74-80-82-88-89
Disequazioni lineari	<ul style="list-style-type: none">• Pag. 692-693: 18-19-23-35-36• Pag. 694-695: 46-47-50-55-59-60
Nozioni fondamentali di geometria razionale	<ul style="list-style-type: none">• Pag. 836: 1-3-4-5-6• Pag. 837: 2-4
I triangoli	<ul style="list-style-type: none">• Pag. 880: 3-4-6-9• Pag. 881: 2-4
Rette parallele. Applicazioni ai triangoli	<ul style="list-style-type: none">• Pag. 914: 1-5-8• Pag. 915: 4-6
Parallelogrammi e trapezi	<ul style="list-style-type: none">• Pag. 949: 6-8-10• Pag. 950: 3-5-6

Buon lavoro e buone vacanze,

Prof. Dario Topini

Esercizi per il recupero

Altri esercizi per il recupero



QUESITI A RISPOSTA MULTIPLA

- 1** Le coppie $-\frac{3}{7}$ e $-\frac{6}{11}$, $\frac{7}{12}$ e $-\frac{7}{12}$ sono formate da numeri:
a concordi, concordi **b** concordi, opposti **c** uguali, discordi **d** uguali, opposti
- 2** Quale delle seguenti disuguaglianze è corretta?
a $-\frac{3}{5} < -\frac{7}{8}$ **b** $-\frac{5}{4} > \frac{4}{5}$ **c** $\frac{6}{7} < \frac{7}{8}$ **d** $0 < -5$
- 3** Quale, tra le seguenti frazioni, è ridotta ai minimi termini?
a $\frac{9}{12}$ **b** $\frac{56}{63}$ **c** $\frac{35}{49}$ **d** $\frac{22}{27}$
- 4** Quale, tra le seguenti frazioni, è equivalente a $\frac{7}{8}$?
a $\frac{49}{56}$ **b** $\frac{14}{24}$ **c** $\frac{21}{16}$ **d** $\frac{10}{11}$
- 5** Riducendo al minimo comune denominatore le frazioni $\frac{3}{4}$ e $\frac{1}{6}$, si ottiene:
a $\frac{18}{24}$ e $\frac{4}{24}$ **b** $\frac{6}{12}$ e $\frac{2}{12}$ **c** $\frac{12}{24}$ e $\frac{4}{24}$ **d** $\frac{9}{12}$ e $\frac{2}{12}$

- 6** Riduci ai minimi termini le seguenti frazioni.

$$\frac{10}{15} \quad \frac{60}{84} \quad \frac{66}{88} \quad \frac{36}{9} \quad \frac{7}{28} \quad \frac{56}{42} \quad \frac{45}{60} \quad \frac{39}{26}$$

- 7** Riconosci le frazioni equivalenti tra le seguenti.

$$\frac{27}{45} \quad \frac{22}{35} \quad \frac{56}{98} \quad \frac{100}{175} \quad \frac{21}{35} \quad \frac{4}{7}$$

- 8** Riduci al minimo comune denominatore le seguenti frazioni.

$$\frac{72}{144} \quad \frac{45}{50} \quad \frac{63}{72} \quad \frac{90}{120}$$

- 9** Disponi in ordine decrescente le seguenti frazioni.

$$\frac{34}{10} \quad \frac{22}{4} \quad \frac{23}{6} \quad \frac{39}{27} \quad \frac{20}{6} \quad \frac{21}{12} \quad \frac{91}{52} \quad \frac{12}{9}$$

- 10** Disponi in ordine crescente i seguenti numeri razionali.

$$-\frac{3}{5} \quad -4 \quad +\frac{1}{3} \quad 0 \quad +\frac{2}{5} \quad -\frac{17}{8} \quad +2 \quad +\frac{6}{7}$$

Esegui le seguenti addizioni algebriche.

11 $-\left(\frac{3}{5} - \frac{1}{10} + \frac{7}{2}\right) + \left(3 - \frac{3}{4}\right) - \left(\frac{2}{5} - \frac{5}{4} - \frac{1}{2}\right)$ $\left[-\frac{2}{5}\right]$

12 $1 - \left(\frac{5}{4} - \frac{5}{6}\right) + \left[\left(\frac{17}{5} - 2\right) - \left(\frac{7}{3} - \frac{3}{5} + 2\right)\right] - \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{2}\right)$ $\left[-\frac{1}{2}\right]$

Esegui le seguenti moltiplicazioni e divisioni in due modi: prima dando la precedenza alle parentesi e poi applicando la proprietà distributiva.

13 $16 \cdot \left(-1 + \frac{7}{8} + \frac{1}{22} - \frac{6}{11}\right)$ $\left(\frac{17}{18} - \frac{11}{12} - 1\right) \cdot \left(-\frac{9}{7}\right)$

14 $\left(\frac{6}{5} - \frac{7}{10} + \frac{3}{4}\right) : \left(-\frac{5}{2}\right)$ $\left(\frac{2}{3} - \frac{4}{9} + \frac{7}{6}\right) : \frac{5}{12}$

Calcola il valore delle seguenti espressioni.

15 $1 - \frac{3}{14} : \left(\frac{9}{28} - \frac{1}{4} \right) \cdot \left(\frac{28}{9} - 4 \right) + \frac{45}{19} \cdot \left(-\frac{1}{12} + \frac{3}{10} - \frac{7}{6} \right) - \frac{35}{12} \cdot \left(\frac{13}{10} - \frac{15}{14} \right)$ $\left[\frac{3}{4} \right]$

16 $\frac{13}{10} - \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{14}{3} \right) \cdot \left(-\frac{8}{25} \right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{7}{60} \right) : \left(-\frac{39}{35} \right) \right] : \left(1 + \frac{1}{24} \right)$ $\left[-\frac{1}{6} \right]$

QUESITI A RISPOSTA MULTIPLA

17 $\left(-\frac{1}{2} \right)^5$ è uguale a
a $-\frac{5}{32}$ **b** $-\frac{1}{32}$ **c** $\frac{1}{32}$ **d** $-\frac{1}{10}$

18 $\left[\left(\frac{4}{5} \right)^2 : \left(-\frac{8}{5} \right)^2 \right]^3$ è uguale a
a $-\frac{64}{125}$ **b** $\frac{1}{32}$ **c** $\frac{1}{64}$ **d** $\frac{1}{8}$

19 A quale delle seguenti espressioni si può applicare una proprietà delle potenze e quale risultato si ottiene?

• $\left(\frac{3}{2} \right)^4 - \left(\frac{3}{2} \right)^3$ • $\left(\frac{3}{2} \right)^4 : \left(\frac{3}{4} \right)^3$ • $\left(\frac{3}{2} + \frac{3}{4} \right)^2$ • $\left(\frac{3}{2} \right)^4 : \left(\frac{3}{4} \right)^4$

a alla prima: $\frac{3}{2}$ **b** alla seconda: $\frac{1}{2}$ **c** alla terza: $\frac{9}{4} + \frac{9}{16} - \frac{45}{16}$ **d** alla quarta: 16

20 $\left(-\frac{3}{2} \right)^7 : \left(\frac{3}{2} \right)^{-5} \cdot \left(\frac{3}{2} \right)^{-3}$ è uguale a
a $\left(-\frac{3}{2} \right)^{15}$ **b** $\left(\frac{3}{2} \right)^{15}$ **c** $\left(-\frac{3}{2} \right)^9$ **d** $\left(\frac{3}{2} \right)^9$

Esegui le seguenti operazioni applicando le proprietà delle potenze.

21 $\left(\frac{7}{5} \right)^3 \cdot \left(\frac{7}{5} \right)^6 \cdot \left(\frac{7}{5} \right); \left(\frac{7}{5} \right)^3 \cdot \left(-\frac{15}{14} \right)^3; \left[\left(\frac{7}{5} \right)^3 \right]^4$ $\left[\left(\frac{7}{5} \right)^{10}; -\frac{27}{8}; \left(\frac{7}{5} \right)^{12} \right]$

22 $\left[\left(-\frac{1}{2} \right)^2 \right]^3; \left(-\frac{2}{5} \right)^3 : \left(\frac{4}{5} \right)^3; \left[\left(-\frac{2}{5} \right)^3 \cdot \left(\frac{4}{5} \right)^3 \right]^0$ $\left[\frac{1}{64}; -\frac{1}{8}; 1 \right]$

23 $\left(-\frac{2}{5} \right)^2 \cdot \left(-\frac{2}{5} \right)^4; \left(\frac{3}{2} \right)^2 : \left(\frac{3}{2} \right)^{-2}; \left(\frac{7}{6} \right)^{-3} \cdot \left(-\frac{3}{14} \right)^{-3}$ $\left[\frac{25}{4}; \frac{81}{16}; 64 \right]$

24 $\left(\frac{3}{4} \right)^{-2} \cdot \left(\frac{3}{4} \right)^4; \left(-\frac{2}{5} \right)^{-2} : \left(-\frac{2}{5} \right)^4; \left[\left(\frac{1}{2} \right)^{-2} \right]^3$ $\left[\frac{9}{16}; \frac{4}{25}; \frac{1}{64} \right]$

Calcola il valore delle seguenti espressioni applicando, quando è possibile, le proprietà delle potenze.

25 $\left[\left(\frac{2}{3} \right)^2 \cdot \left(-\frac{3}{4} \right)^2 \right]^3 : \left(-\frac{1}{2} \right)^4 + \left(-1 + \frac{3}{2} \right)^2 - \left(-\frac{3}{4} \right)^0$ $\left[-\frac{1}{2} \right]$

26 $\left[\left(-\frac{3}{5} \right)^4 \cdot \left(-\frac{3}{5} \right)^6 : \left(-\frac{3}{5} \right)^5 \right]^2 : \left[\left(-\frac{21}{10} \right)^2 : \left(\frac{7}{2} \right)^2 \right]^5 - 5^0 - 2^2 + (-2)^2$ $[0]$

27 $2^{-2} - 2^{-2} : \left\{ \frac{4}{3} \cdot \left[\left(1 - \frac{1}{5} - \frac{3}{10} \right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^4 \right]^2 + 6^{-1} \right\}^2$ $\left[-\frac{3}{4} \right]$

QUESITI A RISPOSTA MULTIPLA

28 Le frazioni $\frac{27}{36}$ e $\frac{36}{27}$ generano
a entrambe due numeri periodici misti **b** entrambe due numeri periodici semplici
c entrambe due numeri decimali finiti **d** un numero decimale finito e uno periodico semplice

29 Le frazioni generatrici di 2,15; 2,15; 2,15; 2,015 sono rispettivamente

a $\frac{215}{99}; \frac{97}{45}; \frac{71}{33}; \frac{61}{30}$ **b** $\frac{215}{99}; \frac{71}{30}; \frac{71}{33}; \frac{133}{66}$
c $\frac{43}{20}; \frac{71}{30}; \frac{71}{33}; \frac{61}{30}$ **d** $\frac{43}{20}; \frac{97}{45}; \frac{71}{33}; \frac{133}{66}$

30 $0,15 \cdot 10^{-3} =$
a 0,0015 **b** 0,00015 **c** 0,000015 **d** $0,15^4$

31 È data la proporzione $a : b = c : d$. Tra le seguenti proporzioni quale *non* ne è una conseguenza?
a $b : a = d : c$ **b** $d : b = c : a$ **c** $c : b = a : d$ **d** $c : a = d : b$

32 Trasforma in numero decimale le seguenti frazioni: $\frac{18}{24}; \frac{24}{18}; \frac{360}{48}; \frac{48}{360}; \frac{36}{7}; \frac{53}{22}$.
 $[0,75; 1,3; 7,5; 0,13; 5,142857; 2,409]$

33 Trova la frazione generatrice dei seguenti numeri decimali: 5,75; 5,75; 5,75; 1,3; 1,03; 0,006.
 $\left[\frac{23}{4}; \frac{259}{45}; \frac{190}{33}; \frac{4}{3}; \frac{331}{300}; \frac{1}{165} \right]$

Calcola il valore delle seguenti espressioni.

34 $(1 - 0,15 - 0,583)^{-2} : (0,83 - 1,16 \cdot 1,25)^2 : (-6)^3 - (-0,5)^2 : (-0,5)^{-3} : (-0,5)^{-2}$ $\left[\frac{1}{3} \right]$

35 $\frac{(-0,1 + 0,46 - 0,16) \cdot 16,25 : (-4,3)}{-1,875 + 0,90 : (2 - 3,6) \cdot (1,16 - 3)}$ $\left[\frac{6}{7} \right]$

Trasforma i seguenti numeri dalla notazione scientifica alla forma decimale.

36 $7,001 \cdot 10^5; 6,43 \cdot 10^{-5}; 5,1 \cdot 10^{-4}$ **37** $1,4308 \cdot 10; 5 \cdot 10^{-6}; 9,7865 \cdot 10^3$

Trasforma i seguenti numeri dalla forma decimale alla notazione scientifica.

38 0,0000001; 1001,01; 14,87 **39** 78 000 000; 0,087; 564,7658

Esegui le seguenti operazioni ed esprimi poi il risultato in notazione scientifica.

40 $2,9 \cdot 10^{-5} + 2,017 \cdot 10^{-6} - 2,24 \cdot 10^{-8} + 5,4 \cdot 10^{-9}$ $[3,1 \cdot 10^{-5}]$

41 $8,907 \cdot 10^5 - 8,38 \cdot 10^4 - 7,2 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2$ $[8 \cdot 10^5]$

42 Determina l'ordine di grandezza dei seguenti numeri.

$6 \cdot 10^5$ $1,73 \cdot 10^{-11}$ $-0,00045 \cdot 10^{-9}$ $-725,61 \cdot 10^{15}$

Calcola il termine incognito nelle seguenti proporzioni.

43 $\frac{36}{25} : x = \frac{63}{20} : \frac{35}{8}; \frac{7}{8} : \frac{5}{12} = \frac{42}{5} : x; \frac{15}{16} : \frac{35}{9} = x : \frac{56}{27}$ $[2; 4; \frac{1}{2}]$

44 $1,1 : x = x : 0,1; 7,1 : x = x : 2,25; 9,6 : x = x : 10,416$ $\left[-\frac{1}{3} \text{ e } \frac{1}{3}; -4 \text{ e } 4; -10 \text{ e } 10 \right]$

- 45 Calcola il terzo proporzionale dopo i due numeri dati.

$$54 \text{ e } 6 \quad 98 \text{ e } 14 \quad \frac{12}{47} \text{ e } \frac{6}{7} \quad \frac{1}{6} \text{ e } \frac{1}{2} \quad \left[\frac{2}{3}; 2; 3; \frac{3}{2} \right]$$

- 46 Calcola il medio proporzionale tra i due numeri dati.

$$44 \text{ e } 99 \quad 126 \text{ e } 14 \quad \frac{12}{5} \text{ e } \frac{15}{4} \quad \frac{45}{32} \text{ e } \frac{5}{2} \quad \left[-66 \text{ e } 66; -42 \text{ e } 42; 3 \text{ e } 3; -\frac{15}{8} \text{ e } \frac{15}{8} \right]$$

- 47 **MATEMATICA E... REALTÀ** Carla prepara dei biscotti seguendo una ricetta che richiede le seguenti dosi per circa 450 g di biscotti:

- farina 250 g
- burro 120 g
- zucchero 75 g
- acqua 5 cucchiaini

Al momento di iniziare si accorge di avere solo 200 g di farina, per cui è costretta a ridurre le dosi. Quali saranno le nuove dosi? Quanti grammi di biscotti otterrà?

[burro: 96 g, zucchero: 60 g, acqua: 4 cucchiaini; circa 360 g]

- 48 Calcola le seguenti percentuali: il 15% di 3000; il 12,5% di 2400. [450; 300]

- 49 Qual è il numero il cui 7% è 350? E quello il cui 3,4% è 510? [5000; 15000]

- 50 Quanto è lungo il lato di un quadrato se la misura della sua area è il 64% di quella di un altro quadrato di lato 40 cm? [32 cm]

- 51 Se si aumenta un numero del 7% oppure lo si diminuisce del 5% si ottengono due numeri che differiscono di 42. Qual è il numero? [350]

QUESITI A RISPOSTA MULTIPLA

- 52 L'insieme dei numeri reali è contenuto

- ☐ a nell'insieme dei numeri razionali ☐ b nell'insieme dei numeri irrazionali
☐ c nell'insieme dei numeri naturali ☐ d in nessuno dei precedenti insiemi

- 53 Il numero 1,414 è

- ☐ a razionale ☐ b irrazionale
☐ c naturale ☐ d intero relativo

- 54 La rappresentazione decimale del numero $\sqrt{10}$ è

- ☐ a finita ☐ b periodica
☐ c infinita e non periodica ☐ d nessuna delle risposte precedenti

Calcola l'errore assoluto che si commette prendendo al posto dei seguenti numeri il valore posto tra parentesi a fianco di ciascuno di essi. Calcola poi l'errore relativo commesso ed esprimilo in forma percentuale.

55 $\frac{2}{3}$ (0,6) $\left[\frac{1}{15} \right]$ 56 $\frac{55}{6}$ (9,1666) $\left[\frac{1}{15000} \right]$ 57 $-1,56$ $(-1,5656)$ $\left[\frac{7}{123750} \right]$

- 58 Disponi in ordine crescente i seguenti numeri rappresentandoli sulla retta reale.

$$-2 \quad \frac{7}{5} \quad \sqrt{2} \quad 0 \quad -\sqrt{5} \quad -1,7 \quad -\sqrt{3} \quad \sqrt{5} \quad 2,23 \quad -2,1$$

Esercizi di approfondimento

Calcola il valore delle seguenti espressioni.

1
$$\frac{-(1,1 + 1,1\overline{6} - 1,6) \cdot \{1 - 1,5 \cdot 4 \cdot [1 + 6,6 \cdot (-2 \cdot 3) \cdot (1 - 1,8\overline{3})]\}^5 \cdot (-0,6)^{-4} \cdot 10,8\overline{3}^{-2} \cdot (-4,3)^2}{\{[(0,6 - 0,5)^3 - 1] : [(-0,16)^2 - 3 \cdot (0,3 - 0,72)] + 1,6\}^{-2}} \quad \left[-\frac{1}{4} \right]$$

2
$$\frac{[(3,54 \cdot 10^5 - 5,4 \cdot 10^4)^3 - 6 \cdot 10^{15}] \cdot (1,25 \cdot 10^6 - 2,5 \cdot 10^5)^{-3}}{(8 \cdot 10^{-6} \cdot 1,25 \cdot 10^4)^2} - \frac{9,72 \cdot 10^{10}}{(3 \cdot 10^2)^4} \quad [-9,9]$$

3
$$\left[\frac{3000 \cdot (30 \cdot 10^{-4})^2 \cdot 45 \cdot 5000 + 30^3}{(21 \cdot 10)^2} - \frac{72 \cdot 10^{-8}}{(0,06 \cdot 10^{-2})^2} \right]^2 \cdot \frac{12 \cdot 10^2}{500 \cdot 10^{-2}} \quad [375]$$

4
$$\left[\frac{30\,000(50\,000 \cdot 60\,000^2 - 2000^4) \cdot 1\,200\,000^{-1} + 110 \cdot 10^{10}}{2000^2 \cdot 5000} - \frac{200^3}{50\,000} \right]^{-2} \quad [10^{-4}]$$

5
$$\left[\frac{(4\,070\,000 - 270\,000 + 14\,000 \cdot 2300) \cdot (0,00000066 - 0,0008^2)^2}{(0,00036 - 0,00006)^2 \cdot 500^{-5}} - 200\,000^2 \right] \cdot (2000)^{-4} \quad [0,31]$$

- 6 Siano

$$a = -\frac{54}{25} \cdot \left(-\frac{10}{45}\right) \cdot \left(-\frac{75}{16}\right) \quad b = -\frac{9}{7} \cdot \left(-\frac{7}{9}\right) + \frac{1}{8} \quad c = -\frac{3}{14} \cdot \frac{49}{81} : \left(-\frac{56}{72}\right) + \frac{1}{6} : \frac{2}{9}$$

Dopo aver calcolato a , b e c :

- a. moltiplica b per la differenza tra a e c ;
 b. calcola la differenza tra i prodotti $a \cdot b$ e $c \cdot b$.

Hai ottenuto lo stesso risultato? Giustifica la risposta.

- 7 Determina tutti i valori di $n \in \mathbb{N}$ in modo che la frazione $\frac{n}{10}$ sia irriducibile e propria.

- 8 Determina tutti i valori di $n \in \mathbb{N}_0$ in modo che la frazione $\frac{15}{n}$ sia irriducibile e impropria.

- 9 Determina tutti i valori di $n \in \mathbb{N}$, tale che $n < 30$, in modo che la frazione $\frac{n}{6}$ sia irriducibile e impropria.

- 10 Scrivi tutte le frazioni irriducibili che hanno denominatore 12 e che sono comprese tra $-\frac{5}{4}$ e $\frac{5}{3}$ (maggiori di $-\frac{5}{4}$ e minori di $\frac{5}{3}$).

- 11 Inserisci tre numeri razionali tra $-\frac{4}{3}$ e $-\frac{7}{6}$.

- 12 Quali sono i numeri interi non nulli che, moltiplicati per $\frac{5}{7}$, danno per prodotto un numero intero? Quali quelli che, divisi per $\frac{5}{7}$, danno per quoziente un numero intero? Quali quelli che, moltiplicati o divisi per $\frac{5}{7}$, danno per risultato un numero intero?

- 13 Qual è il minimo numero naturale non nullo che, diviso per $\frac{6}{5}$, per $\frac{4}{7}$ e per $\frac{15}{8}$, dà per quoziente un numero naturale?

- 14 Determina due numeri razionali sapendo che il loro prodotto è $-\frac{1}{25}$ e il loro quoziente è $-\frac{9}{4}$. $\left[\pm \frac{3}{10} \text{ e } \mp \frac{2}{15} \right]$

Esercizi per il recupero

- 1 Completa la seguente tabella.

racpresentazione estensiva	$A = \{a; c; e; n\}$		
racpresentazione intensiva		$B = \{x x \in \mathbb{N}, 8 < x < 13\}$	
racpresentazione grafica			

- 2 Rappresenta i seguenti insiemi in forma estensiva.

- a. $C = \{c | c \in \mathbb{N}, 6 < c \leq 10\}$
 c. $K = \{k | k \in \mathbb{N} \text{ multiplo di } 6, 36 \leq k < 50\}$

- b. $D = \{d \in \mathbb{N} | d \text{ è un divisore di } 42\}$
 d. $F = \{2f - 1 | f \in \mathbb{N}, 8 \leq f \leq 12\}$

- 3 Rappresenta i seguenti insiemi in forma intensiva.

- a. $A = \{0; 7; 14; 21; 28; 35\}$
 c. $C = \{2; 3; 5; 7; 9; 13; 17; 19; \dots\}$

- b. $B = \{4; 9; 16; 25; 36; 49\}$
 d. $D = \left\{1; \frac{1}{3}; \frac{1}{5}; \frac{1}{7}; \frac{1}{9}; \dots\right\}$

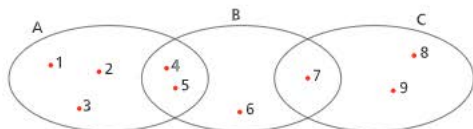
- 4 Dati gli insiemi $A = \{a \in \mathbb{N} | a < 5\}$ e $B = \{b \in \mathbb{N} | 3 \leq b < 7\}$, determina $A \cap B$, $A \cup B$, $A - B$, $B - A$.

- 5 Dopo aver rappresentato in forma estensiva e graficamente gli insiemi A e B nell'insieme universo U , per ciascuna delle situazioni sotto elencate, determina:

$$A \cap B \quad A \cup B \quad A - B \quad B - A \quad \bar{A} \quad \bar{B}$$

- a. $A = \{a | a \text{ è un divisore di } 24\}$ e $B = \{b | b \text{ è un multiplo di } 4 \text{ ed è minore di } 24\}$
 U : insieme dei numeri naturali minori di 25
- b. $A = \{a | a \text{ è una lettera della parola «contrapposizione»}\}$ e
 $B = \{b | b \text{ è una lettera della parola «attrazione»}\}$
 U : insieme delle lettere dell'alfabeto italiano
- c. $A = \{a | a \text{ è un numero primo minore di } 15\}$ e $B = \{b | b \text{ è un numero dispari minore di } 15\}$
 U : insieme dei numeri naturali minori di 15

- 6 Dati i tre insiemi rappresentati mediante diagrammi di Eulero-Venn:



determina:

- a. $D = A \cap B \cap C =$
 b. $E = A \cup B \cup C =$
 c. $F = (A - B) \cup (B - C) \cup (C - A) =$
 d. $G = A \cap (B \cup C) =$
 e. $H = A \cup (B \cap C) =$
 f. $I = (A \cap B) \cup (A \cap C) =$
 g. $J = (A \cup B) \cup (A \cap C) =$

Quali insiemi risultano uguali? Quali proprietà giustificano tali uguaglianze?

- 7** Sia dato l'insieme $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ è divisore di } 8\}$.
 a. Quanti elementi possiede il suo insieme delle parti $\mathcal{P}(A)$?
 b. Elenca tutte le possibili partizioni di A .
8 Determina il prodotto cartesiano degli insiemi $A = \{x; y; z; t\}$ e $B = \{1; 2; 3\}$. Si può affermare che $A \times B = B \times A$?
9 Dati gli insiemi $A = \{3; 4; 5\}$, $B = \{4; 5; 6\}$ e $C = \{a; b\}$, verifica le seguenti uguaglianze:
 a. $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$
 b. $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

QUESITI A RISPOSTA MULTIPLA

- 10** Dati gli insiemi $A = \{f\}$ e $B = \{f; i; n; o\}$ indica la scrittura corretta.
 a. $A - B$ b. $i \in A$ c. $i \in B$ d. $f \in A$
11 La rappresentazione estensiva dell'insieme $\{2n + 3 \mid n \in \mathbb{N}, 2 < n < 5\}$ è
 a. $\{7; 9; 11; 13\}$ b. $\{5; 6; 7; 8\}$ c. $\{9; 11\}$ d. $\{6; 7\}$
12 Dati gli insiemi
 $A = \{a \mid a \text{ è una lettera della parola «amica»}\}$
 $B = \{b \mid b \text{ è una lettera della parola «camicia»}\}$
 $C = \{c \mid c \text{ è una lettera della parola «mici»}\}$
 indica la scrittura non corretta.
 a. $A - B$ b. $C \subset A$ c. $B \subset A$ d. $C \subset B$
13 Se $A = \{3; 4; 5\}$ e $B = \{4; 5\}$, quale delle seguenti scritture è corretta?
 a. $3 \subset A$ b. $B \in A$ c. $3 \in A$ d. $A \subset B$
14 Quale scrittura è corretta?
 a. $a \subset \{a; b\}$ b. $a \in \{a; b\}$ c. $a \subseteq \{a; b\}$ d. $a = \{a\}$
15 L'intersezione tra gli insiemi $A = \{x \mid x \text{ è una lettera della parola «calamita»}\}$ e $B = \{x \mid x \text{ è una lettera della parola «medicina»}\}$ è
 a. \emptyset b. $\{a; c; i; m\}$ c. $\{a; c; m\}$ d. $\{a; c; i; m; n\}$
16 L'unione degli insiemi $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ è un multiplo di } 12 \text{ minore di } 60\}$ e $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ è un multiplo di } 18 \text{ minore di } 60\}$ è
 a. $\{36\}$ b. $\{24; 36; 48; 54\}$
 c. $\{0; 12; 18; 24; 36; 48; 54\}$ d. $\{0; 12; 18; 24; 36; 48; 54; 60\}$

- 17**
- Dati gli insiemi

 $A = \{a \mid a \text{ è una lettera della parola «capotreno»}\}$ $B = \{b \mid b \text{ è una lettera della parola «capostazione»}\}$ l'insieme differenza $A - B$ è

- a. $\{r\}$ b. $\{i; s; z\}$ c. $\{t; r; e; n; o\}$ d. $\{s; t; a; z; i; o; n; e\}$

- 18**
- Il prodotto cartesiano di
- $A = \{a; m; o\}$
- per
- $B = \{ra; ro\}$
- è

- a. $A \times B = \{(a; ra); (a; ro); (m; ra); (m; ro); (o; ra); (o; ro)\} = B \times A$
 b. $A \times B = \{(a; ra); (a; ro); (m; ra); (m; ro); (o; ra); (o; ro)\} \neq B \times A$
 c. $A \times B = \{(ra; a); (ra; m); (ra; o); (ro; a); (ro; m); (ro; o)\} = B \times A$
 d. $A \times B = \{(ra; a); (ra; m); (ra; o); (ro; a); (ro; m); (ro; o)\} \neq B \times A$

- 19**
- Se il signor Rossi al ristorante ordina prima gli spaghetti e poi la cotoletta, ha ordinato una coppia del prodotto cartesiano

- a. $\{\text{spaghetti}; \text{cotoletta}\} \times \{\text{risotto}; \text{arrosto}\}$ b. $\{\text{risotto}; \text{arrosto}\} \times \{\text{spaghetti}; \text{cotoletta}\}$
 c. $\{\text{spaghetti}; \text{risotto}\} \times \{\text{arrosto}; \text{cotoletta}\}$ d. $\{\text{arrosto}; \text{cotoletta}\} \times \{\text{spaghetti}; \text{risotto}\}$

- 20**
- Traduci in forma simbolica le seguenti proposizioni.

- a. Se piove vado in autobus.
 b. Vado in autobus se e solo se piove.
 c. Se un numero è divisibile per 6 allora è pari.
 d. Un numero è divisibile per 9 se e solo se lo è la somma delle sue cifre.

- 21**
- Date le proposizioni

 p : Lorenza lavora a maglia q : Lorenza ascolta un disco

scrivi in forma simbolica le seguenti proposizioni.

- a. Lorenza lavora a maglia e ascolta un disco. b. Lorenza lavora a maglia o ascolta un disco.
 c. Lorenza non lavora a maglia ma ascolta un disco. d. Lorenza o lavora a maglia o ascolta un disco.

- 22**
- Date le proposizioni

 p : mangio la mela q : mangio la pesca

esprimi nel linguaggio naturale le seguenti proposizioni.

- a. \bar{q} b. $p \wedge q$ c. $p \vee q$ d. $p \wedge \bar{q}$ e. $\bar{p} \vee q$ f. $\bar{p} \wedge \bar{q}$
 g. $p \rightarrow q$ h. $\bar{q} \rightarrow p$ i. $p \vee \bar{q}$ j. $\bar{p} \vee \bar{q}$ k. $\bar{p} \wedge q$ l. \bar{p}

- 23**
- Data l'implicazione «se Luca è nato a Roma allora è italiano», scrivi le implicazioni inversa, contraria e contronominale. La verità di quale delle tre si può dedurre dall'implicazione diretta?

- 24**
- Determina l'insieme di verità di
- $p(x) \wedge q(x)$
- , dove

 $p(x)$: x è un numero pari $q(x)$: x è un multiplo di 3con $x \in D = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x \leq 25\}$. $\{6; 12; 18; 24\}$

- 25**
- Dati i predicati

 $p(x; y)$: $x + y \geq 2$ $q(x; y)$: $x - y \geq 2$ con $x, y \in \mathbb{Z}$, determina il valore di verità degli enunciati

- $p(1; 1) \rightarrow q(0; 0)$ $p\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right) \wedge q(5; 6)$ $p(6; 8) \vee q(-5; -7)$

26 Determina il valore di verità delle proposizioni

- a. $\exists x (x + 5 = 1) \quad x \in \mathbb{N}$
 c. $\exists x (x^2 + 1 = 5) \quad x \in \mathbb{N}$
 e. $\exists x (x < 0) \quad x \in \mathbb{N}$
 g. $\exists y (y^5 > 0) \quad y \in \mathbb{Z}$

- b. $\forall x (x^2 \geq 0) \quad x \in \mathbb{Q}$
 d. $\forall x (x \text{ è un numero primo}) \quad x \in \mathbb{N}$
 f. $\exists n (n^2 = 0) \quad n \in \mathbb{N}^*$
 h. $\forall x (x^3 > 0) \quad x \in \mathbb{Z}$

27 Considera le proprietà

α : essere multiplo di 5 β : avere 0 come cifra delle unità γ : essere multiplo di 10

risferite ai numeri naturali. Esprimi in termini di condizioni necessaria e sufficiente le scritture

$$\begin{array}{ccccccc} \alpha \rightarrow \beta & \beta \rightarrow \gamma & \alpha \rightarrow \gamma & \beta \rightarrow \alpha & \gamma \rightarrow \beta \\ \gamma \rightarrow \alpha & \alpha \leftrightarrow \beta & \beta \leftrightarrow \gamma & \alpha \leftrightarrow \gamma & \end{array}$$

e stabilisci quali di esse sono vere.

28 Considera le proprietà α , β e γ dell'esercizio precedente.

- a. Scrivi i predicati $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ espressi da tali proprietà, dove $x \in \mathbb{N}$.
 b. Indicati con A , B e C gli insiemi di verità dei predicati $a(x)$, $b(x)$ e $c(x)$ rispettivamente, scrivi le relazioni di inclusione insiemistica tra A , B e C che corrispondono alle deduzioni logiche vere che hai evidenziato nel precedente esercizio.

QUESITI A RISPOSTA MULTIPLA

29 Se p : 18 è multiplo di 6 e q : 18 è multiplo di 4, come si traduce in forma simbolica la proposizione r : 18 è multiplo di 6 ma non di 4?

- a. $\overline{p} \wedge q$ b. $p \vee \overline{q}$ c. $\overline{p} \vee \overline{q}$ d. $p \wedge \overline{q}$

30 Se p : Andrea conosce il francese e q : Andrea conosce il tedesco, come si traduce nel linguaggio naturale la proposizione logica $\overline{p} \wedge \overline{q}$?

- a. Andrea non conosce il francese o il tedesco
 b. Andrea non conosce il francese e neppure il tedesco
 c. Andrea conosce il francese ma non il tedesco
 d. Andrea non conosce il francese ma conosce il tedesco

31 Qual è il valore di verità della proposizione $p \wedge q$ con p : Barcellona è la capitale della Spagna e q : Il Cairo è la capitale dell'Egitto?

- a. V, perché p e q sono entrambe vere b. F, perché p è vera e q è falsa
 c. F, perché p è falsa e q è vera d. V, perché p e q sono entrambe false

32 Individua la negazione di p : Luca ha 4 penne.

- a. Luca non ha penne b. Non è vero che Luca non ha 4 penne
 c. Luca ha meno di 4 penne d. Luca non ha 4 penne

33 Date le proposizioni semplici p : scrivo una lettera e q : tengo spento il televisore, la proposizione composta «scrivo una lettera o non tengo spento il televisore» è espressa da

- a. $p \wedge q$ b. $p \wedge \overline{q}$ c. $p \vee q$ d. $p \vee \overline{q}$

34 Individua le proposizioni semplici che compongono la proposizione

$p \rightarrow q$: se Boby vede Riccardo, abbaia

- a. p : se Boby vede Riccardo, q : Boby abbaia b. p : Boby vede Riccardo, q : Boby abbaia
 c. p : Boby abbaia, q : se Boby vede Riccardo d. p : Boby abbaia, q : Boby vede Riccardo

Esercizi di approfondimento

Altri esercizi di
approfondimento



QUESITI A RISPOSTA MULTIPLA

1 Considera i predicati $p(x)$: x è intelligente e $q(x)$: x è ricco (con x appartenente all'insieme A degli esseri umani). L'enunciato $\exists x (\overline{p(x)} \wedge q(x))$, $x \in A$, è tradotto, nel linguaggio comune, dalla frase

- a. ogni uomo che non è intelligente è ricco
 b. esistono uomini sia intelligenti sia ricchi
 c. non esistono uomini intelligenti e ricchi
 d. vi sono uomini che non sono intelligenti, ma che sono ricchi
 e. ogni uomo che non è intelligente è ricco
 f. non esistono uomini intelligenti, ma solo uomini ricchi

2 Qual è l'enunciato falso?

- a. $\exists x \exists y (x + y = 23^{23})$ con $x \in \mathbb{N}$, $y \in \mathbb{N}$ b. $\forall x (x^2 > x)$ con $x \in \mathbb{N}$
 c. $\exists x (x^4 - 16 = 0)$ con $x \in \mathbb{N}$ d. $\exists x \exists y (x^2 + y^2 = 1)$ con $x \in \mathbb{N}$, $y \in \mathbb{N}$

3 La legge di annullamento del prodotto si può esprimere simbolicamente nel seguente modo:

$$a \cdot b = 0 \iff a = 0 \vee b = 0$$

Formula questa legge in termini di condizione necessaria e sufficiente. Considera poi i seguenti enunciati e, dopo aver stabilito se sono veri, esprimili in termini di condizione necessaria o condizione sufficiente.

- a. $\forall a \forall b (a \cdot b = 0 \rightarrow a = 0)$ b. $\forall a \forall b (a = 0 \rightarrow a \cdot b = 0)$
 c. $\forall a \forall b [(a = 0 \wedge b = 0) \rightarrow a \cdot b = 0]$ d. $\forall a \forall b [a \cdot b = 0 \rightarrow (a = 0 \vee b = 0)]$
 e. $\forall a \forall b [(a \neq 0 \wedge b \neq 0) \rightarrow a \cdot b \neq 0]$ f. $\forall a \forall b (a \neq 0 \rightarrow a \cdot b \neq 0)$
 g. $\forall a \forall b (a \cdot b \neq 0 \rightarrow b \neq 0)$

4 Dati i predicati

$$\begin{array}{l} a(x): x \text{ è un numero divisibile per } 2 \\ b(x): x \text{ è un numero divisibile per } 5 \\ c(x): x \text{ è un numero divisibile per } 10 \end{array} \quad \text{con } x \in \mathbb{N}$$

verifica che $\forall x (c(x) \rightarrow a(x))$, $\forall x (\overline{a(x)} \rightarrow \overline{c(x)})$, $\forall x [(a(x) \wedge b(x)) \rightarrow c(x)]$ ed esprimi tali enunciati in termini di condizione necessaria o condizione sufficiente. Detti A , B , C rispettivamente gli insiemi di verità dei tre predicati $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$, rappresentali graficamente con i diagrammi di Venn.

5 **MATEMATICA E... REALTÀ** Una macchina per la distribuzione automatica del caffè ha tre pulsanti che permettono, se sono premuti o no, selezioni, cioè scelte, diverse:

- pulsante 1 \rightarrow premuto: dolce - non premuto: amaro
 pulsante 2 \rightarrow premuto: ristretto - non premuto: normale
 pulsante 3 \rightarrow premuto: con latte - non premuto: senza latte

Quante selezioni sono possibili? (Considera gli insiemi $A = \{\text{dolce}; \text{amaro}\}$, $B = \{\text{ristretto}; \dots\}$, ...; puoi individuare le selezioni come elementi del prodotto cartesiano...)

6 **MATEMATICA E... REALTÀ** Di 40 amici che hanno trascorso tutti le vacanze in una località al mare, o in montagna, o al lago si sa che:

- il 40% ha scelto come destinazione una località di montagna
- il 15% ha trascorso le vacanze solo al lago

Esercizi per il recupero

Altri esercizi per il recupero

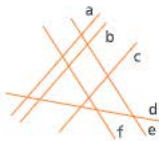


Rappresenta ciascuna delle seguenti relazioni in modo estensivo, con una tabella a doppia entrata, con un diagramma a frecce e con un grafico cartesiano. Indica, per ciascuna di esse, il dominio e il codominio.

- 1** $xRy \leftrightarrow x \text{ è un divisore di } y \quad x \in A, y \in B \quad A = \{2; 3; 5; 7; 9; 19\} \quad B = \{2; 3; 5; 7; 9; 13\}$
- 2** $xRy \leftrightarrow x + 2 = y \quad x \in A, y \in B \quad A = \{1; 2; 3; 5; 8\} \quad B = \{4; 5; 6; 7; 10\}$
- 3** $xRy \leftrightarrow x - \frac{1}{3}y \quad x \in A, y \in B \quad A = \{3; 7; 9; 10; 13\} \quad B = \{9; 21; 24; 30; 39; 42\}$
- 4** $xRy \leftrightarrow x - y \text{ è pari} \quad x \in A, y \in B \quad A = \{4; 5; 6; 7\} \quad B = \{2; 3; 5\}$

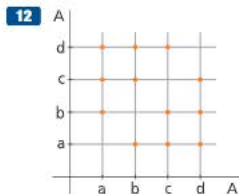
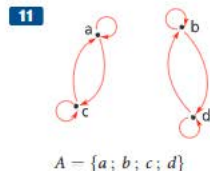
Rappresenta le seguenti relazioni in un insieme in modo estensivo, con una tabella a doppia entrata, con un grafo e con un grafico cartesiano.

- 5** $xRy \leftrightarrow x \leq y \quad x, y \in A \quad A = \{-5; -2; 0\}$
- 6** $xRy \leftrightarrow x \cap y = \emptyset \quad x, y \in A$
dove $A = \{a; b; c; d; e; f\}$ è l'insieme di rette nella figura a lato
- 7** $xRy \leftrightarrow x \text{ è la metà di } y \quad x, y \in A \quad A = \{-8; -6; -4; -3; -2\}$



Individua le proprietà di ciascuna delle seguenti relazioni in un insieme.

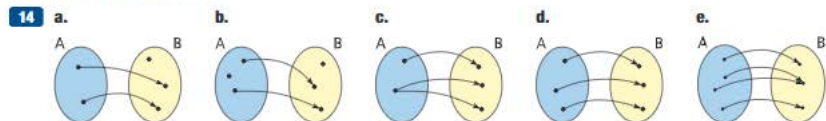
- 8** $R = \{(1; 1); (1; 2); (2; 2); (2; 3); (3; 3)\} \quad A = \{1; 2; 3\}$ [riflessiva e antisimmetrica]
- 9** $R = \{(1; 1); (1; 2); (1; 3); (2; 1); (2; 2); (2; 3); (3; 1); (3; 2); (3; 3)\} \quad A = \{1; 2; 3\}$ [riflessiva, simmetrica, transitiva]
- 10** $R = \{(1; 1); (1; 2); (1; 3); (2; 2); (2; 3); (3; 3)\} \quad A = \{1; 2; 3\}$ [riflessiva, antisimmetrica, transitiva]

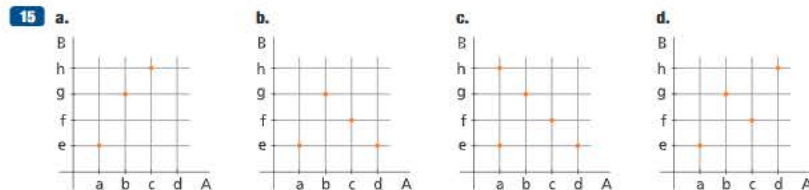


13

	A	x	y	z	w
A					
x	x				
y		x			
z				x	x
w			x	x	

Individua, tra le relazioni rappresentate, quelle che sono delle funzioni. In caso affermativo, specifica se si tratta di funzioni suriettive, iniettive, biunivoche.





Determina il codominio C delle seguenti funzioni $f: A \rightarrow C$ e specifica se si tratta di funzioni suriettive, iniettive, biunivoche.

- 16** $f: x \rightarrow 2x - 6$ $x \in A$ $A = \{3; 6; 9; 12\}$
- 17** $f: x \rightarrow 4x - x^2$ $x \in A$ $A = \{0; 1; 2; 3; 4\}$
- 18** $f: x \rightarrow \frac{x+3}{x^2+1}$ $x \in A$ $A = \{-3; -1; 0; \frac{1}{3}; \frac{5}{3}\}$
- 19** $f: x \rightarrow \frac{x-5}{x^2-2}$ $x \in A$ $A = \{-2; -\frac{1}{2}; 0; 1; 3\}$
- 20** $f: x \rightarrow \frac{x^2+1}{2}$ $x \in A$ $A = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$

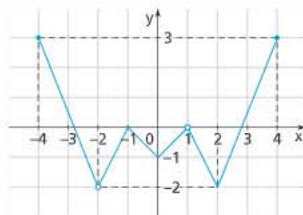
Determina l'espressione analitica delle funzioni composte $f \circ g$ e $g \circ f$.

- 21** $f(x) = 2x - 4$ $g(x) = x - 4$ $[f(g(x)) = 2(x-4) - 4; g(f(x)) = 2x - 8]$
- 22** $f(x) = 2x + 3$ $g(x) = x^3 + 1$ $[f(g(x)) = 2(x^3 + 1) + 3; g(f(x)) = (2x + 3)^3 + 1]$

COMPLETARE...

- 23** Una funzione $y = f(x)$ ha il grafico rappresentato a fianco.

$f(0) = \dots\dots\dots$ $f(2) = \dots\dots\dots$
 dominio $= D = \{x \in \mathbb{R} \mid \dots\dots\dots\}$
 codominio $= C = \{y \in \mathbb{R} \mid \dots\dots\dots\}$
 $y = 3$ ha controimmagini
 $y = \dots\dots$ ha 3 controimmagini
 la funzione f è iniettiva



Considera le seguenti tabelle e stabilisci che tipo di proporzionalità sussiste tra x e y . Scrivi l'equazione della funzione di tale proporzionalità e disegna il grafico.

24

x	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{9}{5}$
y	$\frac{18}{5}$	-6	-9	2	$\frac{24}{7}$	$\frac{5}{3}$

26

x	9	$\frac{5}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{4}$
y	27	$\frac{25}{48}$	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{27}$	$\frac{25}{48}$

25

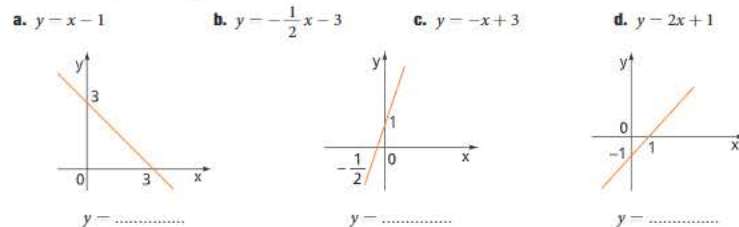
x	32	14	-12	2	2	6
y	16	7	6	1	-1	-3

27

x	-2	-1	0	$\frac{2}{3}$	2	3
y	6	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	6	$\frac{27}{2}$

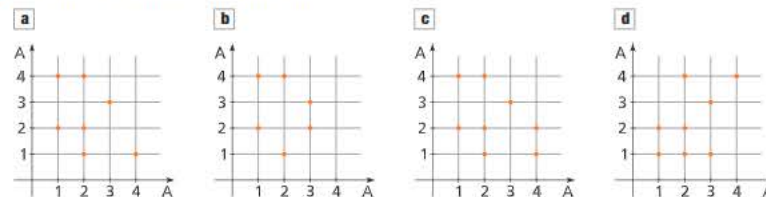
COMPLETARE...

- 28** Le tre rette delle figure seguenti rappresentano tre delle quattro equazioni sotto indicate. Associa a ciascuna retta la corrispondente equazione.



QUESITI A RISPOSTA MULTIPLA

- 29** Quale delle seguenti relazioni è simmetrica?



- 30** $R = \{(1; 1); (1; 2); (1; 3); (2; 3)\}$ è una relazione in $A = \dots\dots\dots$ che è

- a. riflessiva e transitiva b. antisimmetrica e transitiva
 c. riflessiva e antisimmetrica d. riflessiva e simmetrica

- 31** La funzione $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definita come $f: x \rightarrow x^2$

- a. è suriettiva b. è iniettiva
 c. ha per codominio \mathbb{N} d. ha per codominio l'insieme dei quadrati perfetti, escluso 0

- 32** Data la funzione $f: \{0; 1; 2; 3\} \rightarrow \mathbb{N}$, definita come $f: x \rightarrow 10 - x^2$, l'immagine di 1 è

- a. 1 b. 3 c. 9 d. 11

- 33** Date le funzioni $g: x \rightarrow x + 3$ e $f: x \rightarrow 2x$ (da \mathbb{N} a \mathbb{N}), la funzione composta $f \circ g$ è

- a. $f \circ g: x \rightarrow 2x + 3$ b. $f \circ g: x \rightarrow 2 \cdot 2x$
 c. $f \circ g: x \rightarrow (x + 3) + 3$ d. $f \circ g: x \rightarrow 2 \cdot (x + 3)$

- 34** La funzione inversa della funzione $y = x + 1$, di dominio \mathbb{N} , ha equazione

- a. $x = \frac{1}{y} + 1$ b. $x = \frac{1}{y + 1}$ c. $x = y - 1$ d. $x = \frac{1}{y} - 1$

- 35** La funzione inversa della funzione $y = 2x$, di dominio \mathbb{N} , ha equazione

- a. $x = \frac{1}{2y}$ b. $x = 2y$ c. $x = \frac{2}{y}$ d. $x = \frac{y}{2}$

- 36 Data la funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definita come $f: x \rightarrow x^2 + x^4$, la controimmagine di -8 è
- a** -8 **b** 8 **c** 0 **d** non esiste

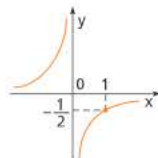
- 37 Considera la funzione rappresentata dalla seguente tabella.

x	$-\frac{9}{8}$	$-\frac{5}{6}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{10}{9}$
$f(x)$	$-\frac{8}{27}$	$-\frac{2}{5}$	-1	1	$\frac{8}{15}$	$\frac{3}{10}$

- a** È di proporzionalità diretta **b** È di proporzionalità inversa
c È di proporzionalità quadratica **d** Non è né di proporzionalità diretta, né inversa, né quadratica

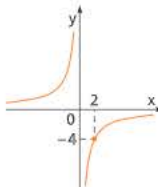
- 38 L'iperbole a fianco rappresentata ha equazione

- a** $y = -\frac{2}{x}$ **b** $y = -\frac{1}{2}x$
c $y = -\frac{1}{2x}$ **d** $y = \frac{1}{2x}$



- 39 L'iperbole a fianco rappresentata ha equazione

- a** $y = \frac{2}{x}$ **b** $y = -\frac{4}{x}$
c $y = -\frac{2}{x}$ **d** $y = -\frac{1}{2x}$
e $y = \frac{8}{x}$ **f** $y = -\frac{8}{x}$



Esercizi di approfondimento

- 1 Considera gli insiemi $A = \{x | x \text{ è un giorno della settimana}\}$, $B = \{x | x \text{ è una nota musicale}\}$ e $C = \{x | x \text{ è un mese dell'anno solare}\}$ e, in ciascuno di essi, la relazione \mathcal{R} così definita:

$x\mathcal{R}y \iff$ in italiano i loro nomi incominciano con la stessa lettera dell'alfabeto

- a.** La relazione data è di equivalenza in tutti e tre gli insiemi? [si]
b. Per quali insiemi la relazione data genera insiemi quozienti con lo stesso numero di elementi? [A e B]
c. Quali elementi contiene la classe di equivalenza individuata da marzo? [marzo e maggio]
- 2 Siano $A = \{a; e; i; o; u\}$ e \mathcal{R} una relazione definita in A . Sapendo che \mathcal{R} è riflessiva e simmetrica e che $a\mathcal{R}e$, $a\mathcal{R}o$, $e\mathcal{R}i$, $i\mathcal{R}o$, determina quali condizioni occorre aggiungere per poter affermare, sotto queste ipotesi, che \mathcal{R} è una relazione di equivalenza. [$e\mathcal{R}o$ (oppure $o\mathcal{R}e$) e $a\mathcal{R}i$ (oppure $i\mathcal{R}a$)]
- 3 Nell'insieme $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ delle coppie ordinate di numeri naturali diversi da zero, considera la relazione così definita:

$$(a; b)\mathcal{R}(c; d) \iff a \cdot d = b \cdot c$$

- a.** Verifica che \mathcal{R} è una relazione di equivalenza.
b. Descrivi le classi di equivalenza e l'insieme quoziente.

- 4 Siano α un piano ed r una retta che giace su α . Nell'insieme $\alpha - r$ dei punti del piano α che non appartengono alla retta r , considera la relazione così definita:

$P\mathcal{R}Q \iff$ il segmento che ha per estremi i punti P e Q non interseca r

- a.** Verifica che \mathcal{R} è una relazione di equivalenza e descrivi le classi di equivalenza. Quanti elementi ha l'insieme quoziente?
b. Verifica che se alla retta r si sostituisce una circonferenza γ la stessa relazione \mathcal{R} non è più una relazione di equivalenza.
- 5 Considera gli insiemi

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbb{Z} \mid -2 < x \leq 3\} \\ B &= \{x \in \mathbb{N} \mid x = 2m \text{ con } m \in \mathbb{N} \text{ e } m < 3\} \\ C &= \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ è un divisore di } 6\} \end{aligned}$$

e le funzioni f , g e h , di dominio rispettivamente A , B e C , così definite:

$$f: x \rightarrow 3x + 1 \quad g: x \rightarrow 4(x^2 - 1) - 2 \quad h: x \rightarrow \frac{3x}{x + 5}$$

Indica con D il codominio di f , con E quello di g e con F quello di h . Determina

- a.** D , E , F $\left[D = \{-2; 1; 4; 7; 10\}; E = \{-6; 10; 58\}; F = \left\{-\frac{9}{2}; -2; -\frac{3}{4}; \frac{1}{2}; \frac{6}{7}; \frac{9}{8}; \frac{18}{11}; 18\right\} \right]$
b. l'insieme delle parti di B $\mathcal{P}(B) = \{\emptyset; \{0\}; \{2\}; \{4\}; \{0; 2\}; \{0; 4\}; \{2; 4\}; \{0; 2; 4\}\}$
c. $(A - C) \times D$ $\{[(0; -2); (0; 1); (0; 4); (0; 7); (0; 10)]\}$
d. $(A \cap B) \cup (E - D)$ $\{[-6; 0; 2; 58]\}$

Traccia, infine, il grafico di f e quello di g .

- 6 Siano:

- a.** $A = \{x \mid x = h^2 \text{ con } h \in \mathbb{Z} \text{ e } -2 \leq h \leq 4\}$, $B = \{x \mid x = \frac{k^3}{2} \text{ con } k \in \mathbb{Z} \text{ e } -2 \leq k \leq 2\}$ e $C = \{x \mid x = 2^t \text{ con } t \in \mathbb{Z} \text{ e } -2 \leq t \leq 2\}$
b. $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ tale che $f: x \rightarrow 2x^2 - x + 1$

Verifica che:

- a.** $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$
b. $f((A \cap B) \cup (B \cap C)) = (f(A) \cap f(B)) \cup \{2\}$
 Puoi concludere che $A \cap B = (A \cap B) \cup (B \cap C)$? Perché?

- 7 Un cilindro retto ha l'altezza doppia del raggio r di base ed è sormontato da un cono retto, di ugual raggio, che ha l'apotema doppio del raggio. Scrivi la formula della superficie di tale solido: questa superficie è funzione del raggio; di quale tipo di funzione si tratta? Tracciane il grafico. [$S = 7\pi r^2$]

- 8 **MATEMATICA - FISICA** Se V è la tensione applicata ai capi di un conduttore di resistenza R , misurata in ohm, e i è l'intensità di corrente che lo attraversa, è noto dalla legge di Ohm che l'intensità i è proporzionale alla tensione V , cioè che $i = \frac{1}{R} V$ (la costante di proporzionalità è l'inverso della resistenza R). Traccia il grafico di tale proporzionalità e determina R sapendo che, se la tensione applicata è 20 volt, la corrente è 0,4 ampere. [50 ohm]

Esercizi per il recupero

Altri esercizi per il recupero



QUESITI A RISPOSTA MULTIPLA

- 1 «Dividi il quadrato della somma di x con y per la differenza tra il doppio di x e il triplo di y ». Dopo aver scritto l'espressione letterale così definita, calcolane il valore per $x = 0,5$ e $y = -0,3$.

a $\frac{1}{18}$ **b** Non ha significato **c** $\frac{13}{72}$ **d** $\frac{13}{18}$ **e** $\frac{1}{72}$

- 2 Il valore dell'espressione $\frac{1}{3}x^2 - 6xy(2y - x) - (-x + 2y)^3$ per $x = -\frac{1}{3}$ e $y = -\frac{1}{2}$ è

a $-\frac{11}{3}$ **b** $-\frac{5}{3}$ **c** -1 **d** 0

- 3 Il valore dell'espressione $\frac{2x^2 - 3y^2 - 0,96}{x^2 - y^2 - 2y - 2,4}$ per $x = 1,2$ e $y = -0,8$

a è 0 **b** non ha significato **c** è 1 **d** è $0,73$

Traduci in espressioni letterali le seguenti espressioni linguistiche.

- 4 Dividi la somma di a e il triplo di b per il doppio di a .
 5 Moltiplica il quadrato di x per l'inverso di y .
 6 Aggiungi al cubo della differenza tra a e b il quadruplo di b .

QUESITI A RISPOSTA MULTIPLA

- 7 Quale delle seguenti espressioni **non** è un monomio?

a $2a^3b^5(-4)$ **b** $2a^3b^5 - 4$ **c** $(2 - 4)a^3b^5$ **d** $2a^3b^{5-4}$

- 8 Il monomio $\left(-\frac{1}{9}\right)a^2b^2\left(\frac{3}{2}\right)^2bc^3(-6)cd$ ridotto a forma normale ha

a coefficiente $\frac{3}{2}$ e parte letterale $a^2b^2c^3d$ **b** coefficiente $\frac{3}{2}$ e parte letterale $a^2b^3c^4d$
c coefficiente 1 e parte letterale $a^2b^2c^3d$ **d** coefficiente 1 e parte letterale $a^2b^3c^4d$

- 9 Nel monomio 3^6x^6y

a il grado complessivo è 13 , il grado rispetto a x è 6 e quello rispetto a y è 1
b il grado complessivo è 12 , il grado rispetto a x è 6 e quello rispetto a y è 0
c il grado complessivo è 7 , il grado rispetto a x è 6 e quello rispetto a y è 1
d il grado complessivo è 6 , il grado rispetto a x è 6 e quello rispetto a y è 0

- 10 Il monomio $-21a^3b^2c$ è divisibile

a per $2a^2b^2$ e per $-7abcd$ **b** per $2a^2b^2$ e non per $-7abcd$
c per $-7abcd$ e non per $2a^2b^2$ **d** né per $2a^2b^2$ né per $-7abcd$

- 11 $\left(\frac{7}{10}ab^2c^6\right) : \left(-\frac{14}{5}abc^2\right)$ è uguale a

a $-\frac{49}{25}a^2b^3c^{12}$ **b** $-\frac{1}{4}b^2c^3$ **c** $-\frac{1}{4}a^2b^3c^{12}$ **d** $-\frac{1}{4}bc^4$

12 Individua l'uguaglianza corretta.

a $\frac{2}{3}a^2b^3 - \frac{5}{3}a^2b^3 = \frac{1}{3}$

b $2a^{10} : \left(\frac{1}{3}a^2\right) = 6a^5$

c $a^3b : a \cdot b = a^2b^2$

d $4x^2y : \left(\frac{1}{2}xy\right) = 2x$

13 Individua l'affermazione falsa.

a Il monomio nullo è divisibile per qualsiasi monomio non nullo

b Il quoziente tra due monomi simili è un numero

c $5x^3yz^4$ è multiplo di $\frac{1}{2}xy$

d Il prodotto di due monomi simili è un monomio simile ai fattori

14 Dividendo $\frac{1}{3}a^2b^3$ per un monomio, si ottiene $\frac{1}{2}ab^2$. Qual è il divisore?

a $\frac{3}{2}ab$

b $\frac{2}{3}ab$

c $\frac{1}{2}a^2b$

d $\frac{1}{3}ab^2$

COMPLETARE...

15 $-\frac{5}{6}xy + y + \dots = -\frac{1}{3}xy + y$

$t^3 - \frac{3}{2}t^2 + \dots - t^3$

16 $\left(-\frac{32}{35}x^3y^m\right) \cdot \left(\dots x^m y^4\right) = -\frac{6}{7}x^6y^5$

$\left(\dots a^{-b^3}\right) \cdot \left(-\frac{25}{14}a^3b\right) = -\frac{10}{9}a^5b^m$

17 $\left(\dots \frac{8}{55}a^3b^m c\right) : \left(-\frac{12}{11}a^2b^2c^m\right) = \dots a^{-m}b^2$

$\left(-\frac{21}{26}x^m y^m\right) : \left(\dots x^3y^3\right) = -\frac{15}{4}y$

18 $\left(\dots x^4y^m\right)^m = -\frac{1}{36}x^8y^6$

$\left(\dots a^{-b^3}\dots\right)^m = -\frac{125}{64}a^3b^9c^6$

Semplifica le seguenti espressioni.

19 $2xy - \frac{5}{6}xy - \frac{5}{9}xy - \frac{11}{10}xy + \frac{4}{3}xy - \frac{7}{5}xy + \frac{5}{9}xy$

[0]

20 $\frac{11}{6}a^2 + \frac{2}{3}a - \frac{1}{3}ab^3 - \frac{21}{10}a^2 - \frac{2}{3}a + \frac{19}{15}a^2 - \frac{1}{6}ab^3 + \frac{1}{2}ab^3$

[a^2]

21 $-\frac{9}{8}v - \frac{7}{15}y - \left[\left(\frac{1}{6}v - \frac{1}{10}y - \frac{5}{16}v\right) - \left(\frac{11}{12}v - \frac{1}{5}y + \frac{1}{6}y\right) - \left(\frac{1}{16}v + \frac{2}{5}y\right)\right]$

[0]

22 $\left(\frac{3}{5}tx - tx\right) \cdot \left(-\frac{1}{6}t^2x\right) - \frac{7}{10}t^3x^2 + \left(\frac{1}{4}t^6x^3 - \frac{7}{9}t^6x^3 + \frac{1}{12}t^6x^3\right) : \left(\frac{1}{6}t^3x - \frac{7}{2}t^3x\right)$

[$-\frac{1}{2}t^3x^2$]

23 $\frac{8}{15}s^4 + \frac{8}{15}s^2 \left(-\frac{25}{16}s^2\right) + \left(3s - \frac{7}{5}s\right) \left[\frac{7}{4}s \left(2s^2 - \frac{5}{7}s^2 - \frac{21}{21}s^2\right) - \frac{1}{8}s^3 - \frac{7}{6}s^3\right]$

[$\frac{7}{10}s^4$]

24 $\left[\frac{35}{18}ab^2 \cdot \left(-\frac{9}{14}a^2b^3\right) - \frac{24}{11}a^5b^6 : \left(-\frac{36}{11}a^2b\right) + \frac{1}{4}a^3b^5\right] : \left(-\frac{5}{6}a^2b^4\right) - \frac{9}{10}ab$

[$-\frac{1}{2}ab$]

25 $-\frac{1}{2}a^2b^3 - \frac{1}{2}b \left[-\frac{1}{2}b \left[-\frac{1}{2}b \left(\frac{3}{28}a^2 - \frac{4}{21}a^2 + \frac{1}{6}a^2 - \frac{3}{4}a^2\right) + \frac{1}{9}a^2b\right] - \frac{12}{35}a \left(-\frac{21}{8}b\right) \left(-\frac{20}{27}ab\right)\right]$

[$-\frac{1}{18}a^2b^3$]

26 $\left(-\frac{1}{2}t\right)^4 - \left[\left(-\frac{4}{3}ty^2\right)^5 : \left(-\frac{4}{3}ty^2\right)^3 - \frac{1}{3}ty(2ty^3 - \frac{3}{7}ty^3) - \left(-\frac{27}{7}ty^2\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}y\right)^3\right] : \left(-\frac{2}{3}y^2\right)^4$

[0]

27 $\left[\left(-\frac{1}{2}xy\right)^2 + 2xy^2 : (xy^2) - \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} + 2x(xy^2)\right] : (4x)^2$

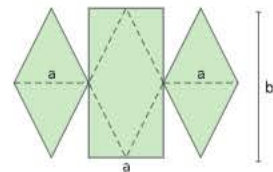
[$\frac{9}{64}y^2$]

28 $\frac{3}{4}x^2 \left(y - \frac{1}{2}y + \frac{1}{6}y\right)^2 + \left(\frac{5}{6}x\right)^5 : \left(\frac{5}{6}x\right)^3 \cdot \left(-\frac{3}{5}y\right)^2 - \frac{5}{14}x \left(\frac{17}{10}xy^2 - \frac{13}{6}xy^2\right)$

[$\frac{3}{4}x^2y^2$]

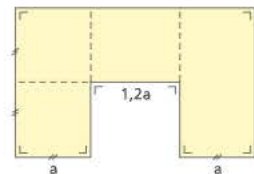
29 L'area della figura è rappresentata dal monomio $2ab$; quale monomio rappresenta l'area del rettangolo? E quale quella di uno dei due rombi?

[ab ; $\frac{ab}{2}$]



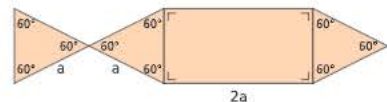
30 Utilizza i dati della figura e determina perimetro e area dell'ottagono concavo.

[12,4a; 5,2a²]



31 Osserva la figura e determina il perimetro dell'ennagono concavo.

[11a]



32 In un rettangolo la base misura $\frac{3}{4}b$ e l'altezza $\frac{5}{3}b$. Quanto misura l'area? Se l'altezza diminuisce di $\frac{1}{2}b$ e l'area misura $7b^2$, quanto misura la base?

[$\frac{5}{4}b^2$; $6b$]

Determina il massimo comune divisore e il minimo comune multiplo dei monomi dei seguenti gruppi.

33 $36a^4b^3$; $-48b^5c^2$ $18x^3y^4$; $54x^2z^2$; $81y^5z^4$ [12b³; 144a⁴b⁵c²; 9; 162x³y⁵z⁴]

34 $\frac{2}{3}h^3k^3$; $-\frac{3}{5}hk^2l^4$; $5hk^4l^2$ $12a^2c^2$; $-60a^2b^4$; $25b^3c^3$ [hk^2 ; $h^3k^4l^4$; 1; 300a²b⁴c³]

QUESITI A RISPOSTA MULTIPLA

35 Il polinomio $\frac{3}{5}a^2b - \frac{3}{5}ab^2 + \frac{2}{5}a^2b - \frac{2}{5}ab^2$ ridotto a forma normale è

a 0

b a^6b^6

c $a^2b - ab^2$

d $a^4b^2 - a^2b^4$

36 Il grado del polinomio $2a^4b^3 - ab^7 + 9ab - 12$ è

a 17

b 14

c 8

d 7

37 Nel polinomio $5a^4b - ab^4 + 9a^2b^3 - 12$ il grado rispetto ad a è

a 7

b 6

c 5

d 4

38 Il polinomio $2a^5b^3 - a^3b^4 + 9a^2b^3 - 12$ è ordinato

a sia rispetto ad a sia rispetto a b

b rispetto ad a e non rispetto a b

c rispetto a b e non rispetto ad a

d né rispetto ad a né rispetto a b

39 Il polinomio $3a^2b - ab^2 + 3$ è

- a** omogeneo e completo sia rispetto ad a sia rispetto a b
b omogeneo ma non completo né rispetto ad a né rispetto a b
c non omogeneo ma completo sia rispetto ad a sia rispetto a b
d né omogeneo né completo rispetto ad a né completo rispetto a b

40 Se $P(x)$ e $Q(x)$ sono due polinomi rispettivamente di grado m ed n (con $m \neq n$), la loro somma ha grado

- a** $m + n$ **b** $m \cdot n$
c uguale al maggiore dei due gradi **d** nessuna delle risposte precedenti

41 Perché sia il quadrato di un binomio, a $4a^2 + \dots + 9b^4$ occorre aggiungere

- a** $6ab^2$ **b** $12ab^2$ **c** $72ab^2$ **d** $72a^2b^4$

42 $(2a - b - c)^2$ è uguale a

- a** $4a^2 - b^2 - c^2$ **b** $4a^2 - b^2 + c^2$
c $4a^2 + b^2 + c^2 - 4ab - 4ac - 2bc$ **d** $4a^2 + b^2 + c^2 - 4ab - 4ac + 2bc$

VERO O FALSO?

- 43** **a.** Il grado della somma di due polinomi può essere inferiore al grado di ciascun polinomio.
b. Il quoziente di due polinomi $A(x)$ e $B(x)$ aventi lo stesso grado è un numero.
c. Se due polinomi $A(x)$ e $B(x)$ sono completi, la loro somma è un polinomio completo.
d. Se $A(x; y)$ e $B(x; y)$ sono polinomi omogenei, la loro somma è un polinomio omogeneo.

V **F**
V **F**
V **F**
V **F**

Semplifica le seguenti espressioni.

44 $(8x^2 - 6xy) - (5x^2 + xy - 2y^2) - (x^2 - 5xy + 2y^2)$ $[2x^2 - 2xy]$

45 $(h^2k - 2hk^2 - h + k^2) - (2hk^2 - h) + (4h^2k - 5k^2) - (2h^2k - 4hk^2)$ $[3h^2k - 4k^2]$

46 $\left(\frac{1}{6}v^3 + \frac{5}{9}v^2\right) - \left(\frac{2}{3}v^3 + \frac{4}{3}v^2 - \frac{1}{6}v\right) + \left(v^2 + \frac{4}{3}v\right) - \left(\frac{1}{4}v^3 + v^2 + \frac{3}{2}v\right)$ $\left[-\frac{3}{4}v^3 - \frac{7}{9}v^2\right]$

47 $5s^3 - [-(3s^2 - 9s) + (5s^3 - 7)] + [(6s^2 + 9) - (2s^2 - 6s + 12)] - (-3s + 5)$ $[-5s^2 - 1]$

48 $a^2 - \left[\left(\frac{1}{14}a - \frac{3}{2}\right) - \left(\frac{2}{3}a^2 - \frac{4}{3}\right)\right] + \left[\frac{1}{21}a - \left(\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{6}\right)\right] + \left(-\frac{3}{4}a^2 - \frac{1}{7}a\right)$ $\left[\frac{5}{12}a^2 - \frac{1}{6}a\right]$

49 $-[(1,3r^3 - 2r^2 - 1,6r - 2,6) - (0,3r^2 + r - 3,5)] - [(0,16r^3 + 2,3r^2) - (1,46r^3 - 1,6r + 0,83)]$ $[r]$

50 $(3a - 2b) - \{(9a - 2b - 2c) - [(6a - 5b + 8c) - (2a - 3b + 2c)] - (2a - 3b)\}$ $[-5b + 8c]$

51 $\left(-\frac{1}{3}x^3y^2\right)\left(\frac{3}{10}x^2 - 6xy + \frac{3}{2}y^2\right) - \left(-\frac{1}{20}x^3y - \frac{3}{2}x^2y^2 + \frac{3}{8}xy^3\right)\left(-\frac{4}{3}x^2y\right)$ $\left[-\frac{1}{6}x^5y^2\right]$

52 $\frac{5}{6}v^4(v^2 - 4) - \frac{2}{3}v^3\left(-\frac{1}{10}v^3 + \frac{3}{2}v - \frac{1}{6}\right) - \left(-\frac{3}{2}v^6 + \frac{5}{9}v^4 + \frac{4}{27}v^3\right)\left(-\frac{3}{5}\right)$ $[-4v^4 + \frac{1}{5}v^3]$

53 $\left(\frac{3}{5}n - \frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{3}n^3 + \frac{3}{2}n^2\right) - \frac{3}{10}\left(\frac{2}{3}n^2 + \frac{10}{3}n\right)(-n^2 - 3n)$ $\left[\frac{8}{3}n^3 + \frac{9}{4}n^2\right]$

54 $-6x(-1,25x^3 - 0,6\bar{x} + 0,1)(x - 0,3) - 0,6\bar{x}(1,5x^2 - 0,5x)(7,5x^2 + 6x + 6)$ $[-6x^4 + \frac{2}{9}x]$

55 $(1,5xz - 0,3\bar{x})(0,5xz - 0,1\bar{6}z) - (3x^2 - 0,25x)(0,25z^2 - 0,2z) - 0,375x(1,3\bar{x}z - 0,5z^2)$ $[0]$

56 $\frac{1}{6}\left(-\frac{3}{2}xy\right)^2 - \left[\frac{3}{4}y\left(\frac{2}{9}x - \frac{1}{6}y\right) - \frac{3}{10}xy\right](-5x^2) - \frac{1}{6}xy\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}xy\right)$ $\left[-\frac{3}{4}x^3y\right]$

57 $(5x^3 - 8x)\left(x^2 + \frac{8}{5}\right) - \left[\left(\frac{5}{6}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}\right)\left(\frac{6}{5}x - 6\right) + \frac{1}{5}(11x + 10)(2x - 1)\right](5x^2 + 8)$ $[0]$

58 $1,2 - 1,2[1,25(0,53a - 1,3b + 1)(2a + 5b - 0,75) - (2a + 5b + 0,5)(0,6a - 1,6b + 0,83) + 11(0,5)^4]$ $[-5b + 2]$

59 $-\frac{36}{7}x^2z^3 - \frac{6}{7}x\left\{\frac{1}{15}x^3z - \frac{6}{5}x\left[\frac{5}{2}\left(\frac{1}{10}x^3 - \frac{4}{15}x^2z + 2z^3\right) - \frac{1}{4}x^2(x + z)\right]\right\}$ $[-x^4z]$

60 $(3m - 4y)^2 - (-5m + 4y)^2 + (4m - 6)^2 - 16(my - 3m + 2)$ $[4]$

61 $\left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x\right)^2 - \left(\frac{1}{2}x^3 - \frac{2}{3}x\right)^2 + \frac{1}{18}x^2(x^4 - 1) - \frac{1}{4}x^2(x^2 + 1)^2$ $\left[-\frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^2\right]$

62 $[(0,3a - 3)^2 - (0,5a - 2)^2 + 5(0,16a + 1)^2](0,16a - 1) - 2,5(0,1a - 1)$ $\left[-\frac{15}{2}\right]$

63 $(a - 6b + c)^2 - (3a - 2b + 3c)^2 + 8(a + c)^2 - 8(4b^2 - c^2)$ $[8c^2]$

64 $(3a - 2b)(3a + 2b)(3a - 16b) - (3a + 4b)(9a^2 - 12ab + 16b^2) + b(-12ab^2)$ $[-12ab^2]$

65 $(-4y^2)^3 - (x^3 - 8y^3)(x^3 + 8y^3) - (x^3 - 3y)(xy^2 - x^3 - 3y) + y^2(x^2 - 3)(x^2 + 3)$ $[3xy^3 - 18y^2]$

66 $a[(3a - 4)(3a + 4) + 2(a + 1)(1 - a)] + 7[2a - (a - 1)(a^2 + a + 1)]$ $[7]$

67 $-4 - \{(9b + 2)[(4a - 3b + 2)(a + 3b - 1) - (2a + 3b)(2a - 3b)] - (-9b)^2(a + 1)\}$ $[4a]$

68 $7 - \{(1 - a)[7a^3 + (2a - 3)(2a + 3)(4a^2 + 9) + (3a^2 - 9)(-3a^2 - 9)] - 7(a - 1)(a^2 + a + 1)\}$ $[7a^5]$

69 $(3c - 2z)^3 - (2c - 3z)^3 - (c + z)(19c^2 - 37cz + 19z^2)$ $[0]$

70 $\left(\frac{3}{2}n^2 - \frac{2}{3}\right)^3 - 6n^2\left(\frac{3}{4}n^2 + \frac{1}{2}n - \frac{2}{3}\right)^2 + 2n^3\left(\frac{3}{2}n - 1\right)^2 + 6n^2\left(n - \frac{1}{2}\right)^2$ $\left[\frac{5}{6}n^2 - \frac{8}{27}\right]$

71 $\left(-\frac{1}{8}a^3 - a + 4\right)\left(\frac{1}{8}a^3 - a - 4\right) + \left(\frac{1}{4}a^2 - a\right)^3 - (3a - 8)(3a + 8) - 3\left(\frac{1}{2}a^2 - 4\right)^2$ $\left[-\frac{3}{16}a^5 + 4a^2\right]$

72 $(1 + 2a^2)(2a^2 - 1) - (2a^2 - 3)^2 + (a - 3)(3 - a) - (1 + a)(a - 1)$ $[10a^2 + 6a - 18]$

73 $\left(\frac{2}{3}a^2 - 3\right)^3 + \left(\frac{2}{3}a^2 + 3\right)^3 - 4a^2 \cdot \frac{4a^4 + 18}{27}$ $\left[\frac{100}{3}a^2\right]$

74 $(x^2 - 1)^3(1 + x^2)^3 - (x^6 - x^2)^2 + (-x^2)^4$ $[2x^4 - 1]$

75 $12(4m^2 + 1) - \{9m(m + 4)^2 + (-2m - 4)^3 - (m - 4)^3 - 2(4m + 1)(4m - 1)\}^2 - 16(m - 1)^2(m + 1)^2$ $[24]$

Esegui le seguenti divisioni.

76 $(6s^5 - 3s^4 - 11s^3 - 3s - 2) : (2s^2 - s - 5)$ $[Q = 3s^3 + 2s + 1, R = 8s + 3]$

77 $(5x^2 + 9x^4 + 1) : (x + 3x^2 + 1)$ $[Q = 3x^2 - x + 1, R = 0]$

78 $(9a^7 + 6a^4 - 22a^3 - 1) : (3a^3 - 5a + 1)$ $[Q = 3a^4 + 5a^2 + a + 1, R = 4a - 2]$

79 $(22z^4 - 12z^5 - 3z - 1) : (-2z^2 + 6z^3 - 1)$ $[Q = -2z^2 + 3z + 1, R = 0]$

80 $\left(\frac{1}{5}r^2 - \frac{1}{3}r^3 + \frac{25}{35}r^5 - \frac{9}{5}\right) : \left(\frac{1}{5}r + \frac{1}{3}\right)$ $\left[Q = -\frac{3}{5}r^4 - r^3 + r - \frac{5}{3}, R = 0\right]$

Esegui le seguenti divisioni ordinando i polinomi secondo le potenze decrescenti prima di una lettera e poi dell'altra.

81 $(-8x^2y^3 - 16xy^4 + x^5) : (x^2 - 2xy)$
 $[Q(x) = -x^3 + 2x^2y + 4xy^2, R(x) = -16xy^4; Q(y) = 8y^3 + 8y^2x + 4yx^2 + 2x^3, R(y) = -x^5]$

82 $(-18p^3y^4 + p^7 - 11p^5y^2 + 12p^2y^5) : (-3p^2y - 6y^3 + p^3)$
 $[Q(p) = Q(y) = p^4 + 3p^3y - 2p^2y^2, R(p) = R(y) = 0]$

Esegui le seguenti divisioni applicando la regola di Ruffini.

- 83** $(x^3 - x^2 + 3x - 3) : (x - 1)$ $[Q = x^2 + 3, R = 0]$
84 $(+9a^3 + 12a^4 + 1 + 3a) : (a + 1)$ $[Q = 12a^3 - 3a^2 + 3a, R = 1]$
85 $(+12s^3 + 3s^4 - 2s^2 + 4 - 7s) : (s + 4)$ $[Q = 3s^3 - 2s + 1, R = 0]$
86 $\left(-\frac{1}{3} + \frac{3}{4}s^3 + 12s^2 + \frac{9}{2}s^4\right) : \left(s + \frac{1}{6}\right)$ $[Q = \frac{9}{2}s^3 + 12s - 2, R = 0]$
87 $\left(-x + \frac{4}{9}x^4 - \frac{9}{16}\right) : \left(x - \frac{3}{2}\right)$ $[Q = \frac{4}{9}x^3 + \frac{2}{3}x^2 + x + \frac{1}{2}, R = \frac{3}{16}]$
88 $\left(9t^5 - \frac{1}{27}\right) : \left(t - \frac{1}{3}\right)$ $[Q = 9t^4 + 3t^3 + t^2 + \frac{1}{3}t + \frac{1}{9}, R = 0]$
89 $\left(-\frac{1}{2}m^5 + \frac{1}{2}m^3 + \frac{3}{4}m^6 - \frac{4}{27}\right) : \left(m - \frac{2}{3}\right)$ $[Q = \frac{3}{4}m^5 + \frac{1}{2}m^2 + \frac{1}{3}m + \frac{2}{9}, R = 0]$
90 $\left(3x^3 - \frac{1}{12}x + 2\right) : \left(3x - \frac{1}{2}\right)$ $[Q = x^2 + \frac{1}{6}x, R = 2]$

Esercizi di approfondimento

- 1** Le misure della base e dell'altezza di un rettangolo sono rispettivamente a e b . Se si incrementa la base del 20% e l'altezza del 30%, di quanto si incrementa la misura dell'area? $[56\%]$
- 2** **MATEMATICA E ECONOMIA** Alla Borsa di Milano un titolo, a metà mattinata, scende del 4% rispetto al prezzo di apertura. Il titolo, in chiusura di Borsa, risale del 4%. A fine giornata il titolo è tornato alla quotazione iniziale? $[no, il titolo chiude al 99,84\% del suo valore iniziale]$

- 3** Considera l'espressione

$$M = 4^{3n-2} \cdot 2^{5n-4} + \frac{8^{n-2} \cdot 4^{2n-3} \cdot 64}{2^{5-3n}}$$

- a.** Calcola M . $[2^{2n+1} + 2^n]$
b. Calcola M^3 . $[2^{6n+3} + 3 \cdot 2^{5n+2} + 3 \cdot 2^{4n+1} + 2^{3n}]$
c. Determina n in modo che risulti $M = 3$. $[n = 0]$

- 4** Calcola il valore delle seguenti espressioni

$$A = (3x^n - 2y^n)(x^n + 2y^n) - (3x^n + y^n)(x^n - 2y^n) - 3y^n(3x^n - y^n)$$

$$B = \left[\left(-\frac{1}{2}a^{6n}x^{4n}\right)^2 : \left(-\frac{1}{2}a^{2n}x^n\right)^3 + 2a^{2n}x^{3n} \cdot (-a^{4n}x^{2n}) \right]^2 : (-4a^{6n}x^{5n})^2$$

e verifica che $A : B = y^{2n}$.

- 5** Indicando con Q e R rispettivamente il quoziente e il resto della divisione

$$(x^4 + 1 - 4x - 4x^3 + 6x^2) : (-0,6 + x^3)$$

calcola il valore dell'espressione $6Q^2 - R - 96$.

$$\left[-\frac{134}{3}x + \frac{5}{3} \right]$$

Semplifica le seguenti espressioni.

- 6** $[(6x^5 - 5x^3 + 8x^2 + x - 4) : (2x^2 - 1) + (x - 2)(2 + x) + x] : (-1,5x^2)$ $[-2x - \frac{2}{3}]$
7 $[(3a^2x^2 + ax - 4) : (ax - 1) - ax - 4]^7 : (2ax)^5 - 3(-ax)^2$ $[a^3x^3]$
8 $\{2x^3 + (3 - 4a)x^2 - (2a - 3)x - 4a + 2\} : (x - 2a + 1) - 2(x - 1)^2\}^6 : (25x)^4$ $[\frac{x^2}{25}]$

9 $(a^n - 1)(a^n + 3)(2a^n + 3 - a^{2n}) : (a^{2n} - 1)$ $[9 - a^{2n}]$

- 10** Considera l'espressione

$$E = \frac{1}{2}a^pb^q - 1 \left(3ab^2 - \frac{4}{3}a^pb^q + 4b \right) - (a^p + b^q)^2 - 2a^p \left(\frac{3}{4}ab^{q+1} - \frac{1}{2}a^p \right) + \frac{2}{3}b^q - 1(a^{2p}b^q - 2b^{q+1}) + (b^q - 1)(b^q + 1)$$

- a.** Verifica che il valore di E non dipende da a e da p . $[E = -\frac{4}{3}b^{2q} - 1]$

- b.** Determina E^3 e $(E + 2)(2 - E)$. $[-(\frac{64}{27}b^{6q} + \frac{16}{3}b^{4q} + 4b^{2q} + 1) : -(\frac{16}{9}b^{4q} + \frac{8}{3}b^{2q} + 3)]$

- c.** Calcola il valore dell'espressione $\frac{1}{2} \left(E + \frac{3}{25} \right)^2 - (E + 2)^{-1}(3 + E)$ in corrispondenza di $b = 3, \bar{3}$ e $q = -1$. $[-\frac{18}{11}]$

- 11** Date le funzioni

$$f: x \rightarrow 2 - 3x \quad e \quad g: x \rightarrow x + 1 \quad \text{con } x \in \mathbb{R}$$

calcola l'espressione

$$f(g(x)) + 3 \cdot g(f(x)) - (3x + 1)^2 + [f(x)]^2$$

$$[11 - 30x]$$

- 12** Determina i valori di k in corrispondenza dei quali il resto della divisione

$$[2kx^3 - (2k^2 + 1)x^2 + k^2 - k + 3] : (x - k)$$

è uguale a:

- a.** 0 $[k = 3]$ **b.** -1 $[k = 4]$

- 13** Determina i valori di k in corrispondenza dei quali le seguenti divisioni di polinomi nella variabile x hanno lo stesso resto:

$$\left[\frac{3}{4}x^2 + (k - 1)x - \frac{1}{2}k + \frac{1}{16} \right] : (2x - 1) \quad \left[-2kx^3 + kx^2 - \left(-\frac{17}{6}k + 2 \right)x + 3 \right] : (2x - 3)$$

(Per utilizzare il teorema del resto, applica la proprietà invariantiva a entrambe le divisioni.) $[k = 1]$

- 14** Dimostra che il numero $5^{2n} - 1$, con $n \in \mathbb{N}^*$, è divisibile per 24. (Dall'ipotesi $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 1$ si ha che $2n$ è un numero pari maggiore o uguale a 2; applica quindi il teorema del resto al binomio $5^{2n} - 1 = 5^{2n} - 1^{2n}$...)

- 15** Dopo aver dimostrato che il binomio $x^n - a^n$, con $n \in \mathbb{N}^*$, è divisibile per $(x - a)$, verifica che

- a.** il numero $5^{2n} - 1$ è divisibile per 24 per qualsiasi $n \in \mathbb{N}$;
b. il numero $3^{4n} - 2^n$ è divisibile per 79 per qualsiasi $n \in \mathbb{N}$.

Dimostra le seguenti proprietà dei numeri naturali.

- 16** La somma di due numeri dispari consecutivi è multipla di 4. (Indica, ad esempio, con $2n - 1$ e $2n + 1$ i due numeri...)
17 La somma di tre numeri dispari consecutivi è multipla di 3.
18 La differenza dei quadrati di due numeri dispari consecutivi è divisibile per 8.
19 La differenza tra il quadrato di un numero e il quadrato del numero che lo precede è uguale alla somma dei due numeri.
20 La somma di tre numeri consecutivi è divisibile per 3.
21 La differenza dei cubi di due numeri dispari consecutivi è divisibile per 2.

Esercizi per il recupero

Altri esercizi per il recupero



Scomponi in fattori i seguenti polinomi mediante raccoglimento totale.

- 1** $38a^2bc + 40ab^2c - 20abc^2$ $38a^2bc + 40ab^2c - 20abc^2$ $[2abc(19a + 20b - 10c)]$
- 2** $\frac{15}{7}x^2yz - \frac{10}{21}x^3yz + \frac{5}{14}x^2yz^2 - \frac{5}{7}x^2yz^3$ $[\frac{5}{7}x^2yz(3 - \frac{2}{3}xy + \frac{1}{2}z - z^2)]$
- 3** $[(3x - 1)^2 + (3x - 1)(x - 3) - 2x(3x - 1)]^2$ $[4(3x - 1)^2(x - 2)^2]$

Scomponi in fattori i seguenti polinomi mediante raccoglimento parziale.

- 4** $18ac - 6ad + 15bc - 5bd$ $6a^3 + 9a^2 - 14a - 21$ $[(3c - d)(6a + 5b); (2a + 3)(3a^2 - 7)]$
- 5** $12a^3 + 16a^2b^2 - 9ab - 12b^3$ $5x^2 - xy^2 + 10xy - 2y^3$ $[(4a^2 - 3b)(3a + 4b^2); (5x - y^2)(x + 2y)]$
- 6** $18ax - 15ay - 30bx + 25by - 6cx + 5cy$ $[(6x - 5y)(3a - 5b - c)]$
- 7** $20x^5 + 30x^4 - 4x^3 - 6x^2$ $[2x^2(2x + 3)(5x^2 - 1)]$
- 8** $4r^7 - 6r^6 + r^5 + 8r^4 - 12r^3 + 2r^2$ $[r^2(r^3 + 2)(4r^2 - 6r + 1)]$
- 9** $42x^4y^2 - 14x^3y^4 - 63x^3y^3 + 21x^2y^5 - 14x^2y^2 + 21xy^3$ $[7xy^2(2x - 3y)(3x^2 - xy^2 - 1)]$

Scomponi in fattori i seguenti polinomi ricordando la formula $A^2 + 2AB + B^2 = (A + B)^2$.

- 10** $\frac{4}{9}x^2 - \frac{20}{3}xy^2 + 25y^4$ $\frac{1}{16}a^6 + \frac{1}{3}a^3b^2 + \frac{4}{9}b^4$ $[(\frac{2}{3}x - 5y)^2; (\frac{1}{4}a^3 + \frac{2}{3}b^2)^2]$
- 11** $\frac{9}{16}x^4y^2 - x^2y + \frac{4}{9}$ $\frac{9}{4}a^8 - a^4b^3 + \frac{1}{9}b^6$ $[(\frac{3}{4}x^2y - \frac{2}{3})^2; (\frac{3}{2}a^4 - \frac{1}{3}b^3)^2]$
- 12** $(4a + 5b)^2 - 32a^2 + 50b^2 + (4a - 5b)^2$ $[100b^2]$

Scomponi in fattori i seguenti polinomi ricordando la formula $A^2 + B^2 + C^2 + 2AB + 2BC + 2AC = (A + B + C)^2$.

- 13** $a^4b^2 + 25a^2b^4 + 4 + 10a^3b^3 - 4a^2b - 20ab^2$ $[(a^2b + 5ab^2 - 2)^2]$
- 14** $\frac{9}{25}x^2 + \frac{25}{4}y^2 + \frac{4}{9} - 3xy - \frac{4}{5}x + \frac{10}{3}y$ $[(\frac{3}{5}x - \frac{5}{2}y - \frac{2}{3})^2]$
- 15** $\frac{81}{64}m^4 + \frac{16}{9}m^2n^2 + \frac{1}{36} - 3m^3n + \frac{3}{8}n^2 - \frac{4}{9}mn$ $[(\frac{9}{8}m^2 - \frac{4}{3}mn + \frac{1}{6})^2]$

Scomponi in fattori i seguenti polinomi ricordando la formula $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$.

- 16** $x^6 - 36y^8$ $81t^6 - 1$
- 17** $\frac{25}{16}a^4 - b^2$ $\frac{1}{4}a^4b^2 - \frac{1}{9}$ $[(\frac{5}{4}a^2 + b)(\frac{5}{4}a^2 - b); (\frac{1}{2}a^2b + \frac{1}{3})(\frac{1}{2}a^2b - \frac{1}{3})]$
- 18** $(4a^2 + 3)^2 - 16a^4$ $(2c + 7d)^2 - 25d^2$ $[3(8a^2 + 3); 4(c + 6d)(c + d)]$
- 19** $(2a - b)^2 - 9a^2$ $16z^2 - (3 - 2z)^2$ $[-(5a - b)(a + b); 3(2z + 3)(2z - 1)]$
- 20** $a^4b^4 - 16$ $16a^8 - b^4$ $[(a^2b^2 + 4)(ab + 2)(ab - 2); (4a^4 + b^2)(2a^2 + b)(2a^2 - b)]$

Scomponi in fattori i seguenti polinomi ricordando la formula $A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 = (A + B)^3$.

- 21** $8p^{12} - 36p^8q^3 + 54p^4q^6 - 27q^9$ $-p^9q^6 + 12p^6q^4 - 48p^3q^2 + 64$ $[(2p^4 - 3q^3)^3; (-p^3q^2 + 4)^3]$
- 22** $-125x^9 - 150x^6y^2 - 60x^3y^4 - 8y^6$ $64a^6 + 48a^4b^3 + 12a^2b^6 + b^9$ $[(-5x^3 - 2y^2)^3; (4a^2 + b^3)^3]$
- 23** $-216x^6y^3 + 108x^4y^2 - 18x^2y + 1$ $-x^3y^6 + 6x^2y^4 - 12xy^2 + 8$ $[(-6x^2y + 1)^3; (-xy^2 + 2)^3]$

Ricordando le formule $A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$ e $A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$ scomponi in fattori i seguenti polinomi.

$$\begin{aligned} \text{24} \quad & 64x^6y^3 - 1 & x^9y^6 + 64 & [(4x^2y - 1)(16x^4y^2 + 4x^2y + 1); (x^3y^2 + 4)(x^6y^4 - 4x^3y^2 + 16)] \\ \text{25} \quad & a^3b^9 - \frac{125}{8} & -\frac{64}{125}x^3 + 27 & \left[\left(ab^3 - \frac{5}{2} \right) \left(a^2b^6 + \frac{5}{2}ab^3 + \frac{25}{4} \right); \left(\frac{4}{5}x + 3 \right) \left(\frac{16}{25}x^2 - \frac{12}{5}x + 9 \right) \right] \\ \text{26} \quad & (4t - 1)^3 - 8 & (6a + 5b)^3 + b^3 & [(4t - 3)(16t^2 + 3); 18(a + b)(12a^2 + 18ab + 7b^2)] \end{aligned}$$

Scomponi in fattori i seguenti polinomi ricordando la formula $x^2 + (A + B)x + AB = (x + A)(x + B)$ ($s = A + B$, $p = AB$).

$$\begin{aligned} \text{27} \quad & a^2 + 17a + 16 & x^2 - 23x - 24 & [(a + 1)(a + 16); (a + 1)(a - 24)] \\ \text{28} \quad & p^2 - 30pq + 56q^2 & m^2 - 2mn - 99n^2 & [(p - 2q)(p - 28q); (m + 9n)(m - 11n)] \\ \text{29} \quad & x^4y^4 - 3x^2y^2 - 70 & x^4 - 3x^2y^2 - 70y^4 & [(x^2y^2 + 7)(x^2y^2 - 10); (x^2 + 7y^2)(x^2 - 10y^2)] \end{aligned}$$

Scomponi in fattori i seguenti polinomi applicando il teorema e la regola di Ruffini.

$$\begin{aligned} \text{30} \quad & 2x^3 - 7x^2 + 9 & d^3 - 5d^2 + 3d + 9 & [(x + 1)(x - 3)(2x - 3); (d + 1)(d - 3)^2] \\ \text{31} \quad & x^4 - 2x^2 - 3x - 2 & & [(x + 1)(x - 2)(x^2 + x + 1)] \\ \text{32} \quad & x^4 - x^3 + 3x^2 - 5x - 10 & & [(x - 2)(x + 1)(x^2 + 5)] \end{aligned}$$

Determina il MCD e il mcm dei polinomi dei seguenti gruppi.

$$\begin{aligned} \text{33} \quad & 12x^5y^3 - 36x^4y^4 + 36x^3y^5 - 12x^2y^6 & 6x^4y^2 - 12x^3y^3 + 6x^2y^4 & [MCD = 6x^2y^2(x - y)^2; mcm = 12x^5y^3(x - y)^3] \\ \text{34} \quad & 4a^5 + 4a^4 - 8a^3 & 3a^2 - 3a - 6 & [MCD = 1; mcm = 12a^3(a - 1)(a + 2)(a + 1)(a - 2)] \end{aligned}$$

Esercizi di approfondimento

Dimostra le seguenti proprietà dei numeri naturali.

- La somma di un numero di due cifre con quello che si ottiene scambiando l'ordine delle due cifre è divisibile sia per 11 sia per la somma delle due cifre. (Rappresenta il numero dato nella forma $10x + y$, dove x è la cifra delle decine e y quella delle unità...)
- La differenza tra un numero di tre cifre e quello che si ottiene invertendo l'ordine delle cifre è divisibile per 99.
- Dati tre numeri consecutivi, la somma dei loro cubi è divisibile per il triplo del numero intermedio.
- Dati tre numeri pari consecutivi, sottraendo il quadrato del minore dalla somma dei quadrati degli altri due si ottiene un numero divisibile sia per 4 sia per la metà del numero intermedio aumentata di 4 unità.
- Dati tre numeri pari consecutivi, sottraendo il quadrato del minore dal quadrato della somma degli altri due si ottiene un numero divisibile per 12.
- Dati tre numeri dispari consecutivi, sottraendo il quadrato del maggiore dalla somma dei quadrati degli altri due si ottiene un numero divisibile per il numero intermedio.
- Dati tre numeri pari consecutivi, sottraendo il cubo del minore dalla somma dei cubi degli altri due si ottiene un numero divisibile per 8.
- Dati tre numeri pari consecutivi, sottraendo il cubo del minore dal cubo della somma degli altri due si ottiene un numero divisibile per 8.

- 9 Si dimostri che un numero di quattro cifre tutte uguali è divisibile per 101.
(Esame di stato liceo scientifico, 2009 - sessione suppletiva)

- 10 x e y sono due numeri naturali dispari tali che $x - y = 2$. Il numero $x^3 - y^3$:

- è divisibile per 2 e per 3;
- è divisibile per 2 ma non per 3;
- è divisibile per 3 ma non per 2;
- non è divisibile né per 2 né per 3.

Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire una spiegazione esauriente della scelta operata.

(Esame di stato liceo scientifico, 2003 - sessione ordinaria)

[è divisibile per 2 ma non per 3]

- 11 Sia $P(x) = \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{7}\right)(3x + 1) + \left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{49}\right) - \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{2}x\right)\left(\frac{5}{2}x + \frac{6}{7}\right)$.

- a. Scomponi $P(x)$ nel prodotto di fattori di primo grado. [$P(x) = x(3x + 1)$]

- b. Determina i valori A , B , C e D assunti da $P(x)$ in corrispondenza, rispettivamente, di: $x = 0, \bar{3}$; $x = 0,5$; $x = -0,12$; $x = -2^2$.

$$\left[A = \frac{2}{3}; B = \frac{5}{4}; C = -\frac{28}{363}; D = 44 \right]$$

- c. Determina due interi m e p primi tra loro e un naturale n in modo tale che risulti

$$-\frac{1}{2}(A - B) \cdot (C \cdot D^{-1})^{-1} - \left(\frac{m}{p}\right)^n$$

$$[m = -2, p = +11, n = 3 \text{ oppure } m = +2, p = -11, n = 3]$$

- 12 Dividendo un polinomio $P(x)$ per $(x - 1)$ si ottiene come quoziente $2a$ e come resto $4a^2$, con $a \neq 0$. Determina a in modo che $P(x)$ si annulli per $x = 3$. Traccia, quindi, il grafico della funzione di equazione $y = P(x)$.

$$[a = -1; P(x) = -2x + 6]$$

- 13 Dato il polinomio $P(x) = 2x^2 + x + k$, determina k in modo che -2 sia radice di $P(x)$. In corrispondenza del valore trovato di k , scomponi $P(x)$ in fattori.

$$[k = -6; P(x) = (x + 2)(2x - 3)]$$

- 14 Date le funzioni $f: x \rightarrow 1 - 2x$ e $g: x \rightarrow x^2 + 3x$, con $x \in \mathbb{R}$, scomponi in fattori il polinomio

$$g(f(x)) - f(g(x)) - 5$$

$$[2(x - 1)(3x + 1)]$$

- 15 Determina per quali valori del parametro k i polinomi $x^3 - 2x^2 + 2x + k$ e $3x^2 - 5x - 2$ hanno un divisore di primo grado in comune.

$$[k = -4 \vee k = -\frac{25}{27}]$$

Verso la Prova Invalsi

Soluzioni degli esercizi



QUESITI A RISPOSTA MULTIPLA

- 1 Calcola la differenza $333^2 - 331^2$ senza usare la calcolatrice.

$$\text{a} \quad 8 \quad \text{b} \quad 1328 \quad \text{c} \quad 4 \quad \text{d} \quad 664$$

- 2 $x^6 + x^8 =$

$$\text{a} \quad x^{14} \quad \text{b} \quad 2x^{14} \quad \text{c} \quad x^6(1 + x^2) \quad \text{d} \quad x^6(1 + x)(1 - x) \quad \text{e} \quad x^{48}$$

Esercizi per il recupero

Altri esercizi per il recupero



VERO O FALSO?

- 1** a. La frazione algebrica $\frac{a^3 - b^3}{a - b}$ è un polinomio. ☐ V ☐ F
 b. Ogni polinomio può essere considerato una frazione algebrica di denominatore 1. ☐ V ☐ F
 c. Se il numeratore è 0, la frazione algebrica è 0. ☐ V ☐ F
 d. Se il denominatore è 0, la frazione algebrica è 0. ☐ V ☐ F
 e. Una frazione algebrica non può avere il denominatore uguale a 1. ☐ V ☐ F
 f. L'espressione a^{-2} si può considerare una frazione algebrica. ☐ V ☐ F
- 2** a. Due frazioni algebriche $\frac{N}{D}$ e $\frac{N'}{D'}$ sono equivalenti se $N \cdot D = N' \cdot D'$. ☐ V ☐ F
 b. Due frazioni equivalenti assumono gli stessi valori in corrispondenza degli stessi valori attribuiti alle lettere. ☐ V ☐ F
 c. Le frazioni $\frac{a^2 - 1}{a^2 + 1}$ e $\frac{a^4 - 1}{a^4 + 2a^2 + 1}$ sono equivalenti. ☐ V ☐ F
 d. Per semplificare una frazione algebrica se ne dividono i termini per il loro mcm. ☐ V ☐ F

Determina le condizioni di esistenza delle seguenti frazioni algebriche.

- 3** $\frac{8}{x+1}$; $\frac{1}{5-x}$; $\frac{a+8}{(a-3)^2}$ $[x \neq -1; x \neq 5; a \neq 3]$
- 4** $\frac{2a^3 + b^2}{a^3 - 4a^2b}$; $\frac{1}{a^2b^4 - a^2b^3}$; $\frac{5a - b^2}{ab}$ $[a \neq 0 \wedge a \neq 4b; a \neq 0 \wedge b \neq 0 \wedge b \neq 1; a \neq 0 \wedge b \neq 0]$
- 5** $\frac{7}{a^2 - 36}$; $\frac{7}{(a-6)^2}$; $\frac{6}{a^2 - 6a}$ $[a \neq \pm 6; a \neq 6; a \neq 0 \wedge a \neq 6]$

Semplifica le seguenti frazioni algebriche.

- 6** $\frac{a^2 - 4b^2}{a^2 - 2ab}$; $\frac{x^2 - x - 6}{x^2 + 2x - 2y - xy}$; $\frac{2x - 4}{4 - x^2}$ $\left[\frac{a+2b}{a}; \frac{x-3}{x-y}; -\frac{2}{2+x} \right]$
- 7** $\frac{a^3 - 9a^2b + 27ab^2 - 27b^3}{a^2 - 6ab + 9b^2}$; $\frac{8a^3 + 12a^2 + 6a + 1}{8a^3 + 1}$ $\left[a - 3b; \frac{(2a+1)^2}{4a^2 + 2a + 1} \right]$
- 8** $\frac{ax - 3a + bx - 3b}{9 - x^2}$; $\frac{64 - x^6}{x^4 - 16x^2 + 64}$ $\left[-\frac{a+b}{3+x}; \frac{16 + 4x^2 + x^4}{4 - x^2} \right]$
- 9** $\frac{4x^2 - 9}{2x^2 - x - 3}$; $\frac{9a^2 + 6a + 1}{6a^2 - 7a - 3}$; $\frac{6x^2 + 5x - 6}{8x^3 + 27}$ $\left[\frac{2x+3}{x+1}; \frac{3a+1}{2a-3}; \frac{3x-2}{4x^2 - 6x + 9} \right]$

Calcola le seguenti somme algebriche.

- 10** $\frac{1}{y^2} - \frac{x-3y}{3x^2y} + \frac{1}{4xy^2} - \frac{12x-4y+3}{12xy^2}$ $\left[\frac{1}{x^2} \right]$
- 11** $\frac{x^2 + x - 2}{x^3 - 5x^2 + 6x} - \frac{8x - 24}{x^2 - 4} + \frac{7x^2 - 13x - 2}{x^3 - x^2 - 6x}$ $\left[\frac{24}{(x+2)(x-3)} \right]$
- 12** $\frac{a^2 + 3a - 1}{a^3 - 3a^2 + 3a - 1} + \frac{a}{a^2 - 2a + 1} + \frac{1}{a - 1}$ $\left[\frac{3a^2}{(a-1)^3} \right]$
- 13** $\frac{4+2a}{a^2 - 4} + \frac{a}{a^2 - 5a + 6} + \frac{3}{3-a} + \frac{2}{a-2}$ $\left[\frac{2}{a-2} \right]$

Calcola i seguenti prodotti, quozienti e potenze.

- 14 $\frac{27x^5y^3}{32z^4} \cdot (-12x^2z^3) \cdot \frac{8z^4}{9x^7y^2} \cdot \frac{3a^3b}{20c^6} \cdot \frac{25c^5}{6a^4b^3} \cdot \left(-\frac{4abc}{9ab^3}\right)$ $\left[-9yz^3; -\frac{5}{18ab^3}\right]$
- 15 $\frac{64a^6 + 8a^3b^3}{36a^2b^2 - 9b^4} \cdot \left(-\frac{36a^2b^2 - 36ab^3 + 9b^4}{16a^4 - 8a^3b + 4a^2b^2}\right) \cdot \frac{x^3 - xy^2}{4x - 2y} \cdot \frac{8x^2 - 8xy + 2y^2}{2x^3 + x^2y - xy^2}$ $[-2a(2a - b); x - y]$
- 16 $\frac{2a^4b}{3xy^3} \cdot \frac{ab}{3x^3} \cdot \frac{9x^2 - 6x + 1}{3x + 1} \cdot (9x^2 - 1)$ $\left[\frac{2a^3x^2}{y^3}; \frac{3x - 1}{(3x + 1)^2}\right]$
- 17 $\frac{x^2 - x - 2}{x^2 + x - 2} \cdot \frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 + 2x + 1} \cdot \frac{x^2 - 4}{x^2 - 1}$ $[1]$
- 18 $-\frac{4a^2 - 3ab}{8ab + 6b^2} \cdot \frac{16a^3 - 24a^2b + 9ab^2}{16ab + 12b^2} \cdot \left(-\frac{4a^3 - 3a^2b}{6}\right)$ $\left[\frac{a^2}{3}\right]$
- 19 $\left(\frac{x^3 - 3x^2y}{6xy^3 - 2y^4}\right)^5 \cdot \left(-\frac{7ab^3 - b^4}{ab + 3b^2}\right)^6$ $\left[\frac{x^{10}(x - 3y)^5}{32y^{15}(3x - y)^5}; \frac{b^{12}(7a - b)^6}{(a + 3b)^6}\right]$
- 20 $\left(\frac{x^3b + ab^3}{2a^2 - 2b^2}\right)^4 \cdot \left(-\frac{4x^5 - 16x^4y + 16x^3y^2}{9x^3 - 36x^2y}\right)^{-2}$ $\left[\frac{a^4b^4(a^2 + b^2)^4}{16(a + b)^4(a - b)^4}; \frac{81(x - 4y)^2}{16x^2(x - 2y)^4}\right]$

Semplifica le seguenti espressioni.

- 21 $\left(\frac{2a^2}{a^2 - b^2} - \frac{a^2 + b^2}{a^2 + 2ab + b^2} - \frac{b}{a + b} + \frac{a}{b - a}\right) : (2b^2)$ $\left[-\frac{1}{(a + b)^2}\right]$
- 22 $\left(\frac{a}{16x - 2a} + \frac{ax - a}{16x^2 - 2ax} + \frac{a - 4}{a - 8x} + \frac{1}{2}\right) : \left(\frac{x + 1}{2x}\right)^{-1}$ $\left[\frac{(x + 1)^2}{4x^2}\right]$
- 23 $\left(\frac{2x - y}{x^2 - xy} - \frac{x - y}{xy + y^2} - \frac{1}{x}\right) \cdot \left(\frac{2y}{x - 3y} + \frac{y}{x}\right)$ $\left[\frac{3}{x + y}\right]$
- 24 $\left(1 - \frac{a}{3a - 2}\right) \cdot \left(\frac{a - 2}{a^2 - a} - \frac{2a - 1}{a^2 - 2a + 1} - \frac{2}{a}\right)$ $\left[\frac{2}{1 - a}\right]$
- 25 $\left(\frac{4}{a} - \frac{7}{a - 3}\right) : \left(1 + \frac{1}{a} - \frac{12}{a^2}\right) + \frac{9}{a^2 - 3a} + \frac{3}{a}$ $\left[-\frac{9}{(a - 3)^2}\right]$
- 26 $\frac{x - 3}{3x^2 + 2x - 1} - \frac{3x - 1}{x^2 - 2x - 3} + \frac{4x + 4}{3x^2 - 10x + 3}$ $\left[\frac{4}{1 - 3x}\right]$

Esercizi di approfondimento

- 1 Applicando la definizione di frazioni equivalenti verifica che sono equivalenti le frazioni $\frac{2a^2 + 3ab + b^2}{a^2 - b^2}$ e $\frac{6a^2 + ab - b^2}{3a^2 - 4ab + b^2}$. Successivamente semplifica le due frazioni. Che cosa puoi osservare?
- 2 Semplifica la frazione $\frac{[ax^2 + (2a - a^2)x - a^2 + a] : (x - a + 1)}{(x^5 + 2x^3 + x^2 - 3x - 1) : (x^3 + 3x + 1)}$ $\left[\frac{a}{x - 1}\right]$
- 3 Le frazioni $\frac{x^2 + kx - x - k}{x^2 - 3x + 2}$ e $\frac{x^2 - 8x + 15}{x^2 - 5x + 6}$ sono equivalenti. Quanto vale k ? $[-5]$
- 4 Considera la funzione di equazione $y = \frac{x^2 + x - 2}{x + 2}$. Determina il dominio D della funzione, tracciane il grafico dopo averne semplificato l'espressione analitica e individua il codominio C . $[D = \mathbb{R} - \{-2\}; C = \mathbb{R} - \{-3\}]$

- 5 Considera la funzione di equazione $y = \frac{2x^2 + x - 3}{x - 1}$. Determina il dominio D della funzione, tracciane il grafico dopo averne semplificato l'espressione analitica e individua il codominio C . $[D = \mathbb{R} - \{1\}; C = \mathbb{R} - \{5\}]$
- 6 Considera il polinomio $f(x) = x^2 + x - 2$ e semplifica la frazione $\frac{f(a - 1) + f(2) - f(a)}{f(a + 1) - 10}$ dopo averne determinato le condizioni di esistenza. $[C.E.: a \neq -5 \wedge a \neq 2; -\frac{2}{a + 5}]$
- 7 Considera il polinomio $f(x) = x^2 + 2x - 1$ e semplifica la frazione $\frac{f(a) - f(a + 1) - 1}{a^2 - 4}$ dopo averne determinato le condizioni di esistenza. $[C.E.: a \neq \pm 2; \frac{2}{2 - a}]$
- 8 Siano $A = \frac{(a + b)^{4n} - 2(a + b)^{2n} + 1}{(a^2 + 2ab + b^2)^n + 2(a + b)^n + 1}$ e $B = 1 + (a + b)^{n-2}[(a + b)^{n+2} - 2a^2 - 2b^2 - 4ab]$, con $a \neq -b$ e $n \in \mathbb{N}$, n pari.
- a. Verifica che $A = B$. $[A = B - [(a + b)^n - 1]^2]$
- b. Determina il valore dell'espressione $34 \cdot \left[-A + \frac{1}{2}(A^2 - 1) + 9\right]^{-2}$ in corrispondenza di $a = -\frac{5}{3}$, $b = 0, \overline{6}$ e $n = 8$. $\left[\frac{8}{17}\right]$
- 9 Determina per quali valori di a , b e c le frazioni algebriche $\frac{2ax^2 - bx + 3c}{x^2 - 1}$ e $2 \cdot \frac{x^4 - 2x^2 - 3}{x^4 - 1}$ sono equivalenti. $[a - 1 \wedge b = 0 \wedge c = -2]$
- 10 Date le espressioni $A = \left[-\left(\frac{2}{-2t^2 - 3t - 1} + \frac{t - 1}{t^3 + 1}\right) \cdot \left(\frac{t - 3}{t^2 - 2t^3 - 1 - t}\right)^{-1}\right]^5$ e $B = \left(\frac{t^2 - 1}{t - 1}\right)^{-6n+1}$ determina per quali valori di n si ha $A = B$. Per quali valori di t ha significato tale uguaglianza? $[n = 1; t \neq -\frac{1}{2} \wedge t \neq \pm 1 \wedge t \neq 3]$
- 11 Esprimi la frazione $E = \frac{2x}{2x^2 - 3x + 1}$ come somma di due frazioni A e B , sapendo che
- A e B sono irriducibili;
 - il numeratore di A è di grado 0;
 - la somma dei numeratori di A e B è 0.
- $[A = -\frac{2}{2x - 1} \text{ e } B = \frac{2}{x - 1} \text{ oppure } A = \frac{2}{x - 1} \text{ e } B = -\frac{2}{2x - 1}]$
- 12 Considera il polinomio $P(x) = (k - 2)x^3 - \frac{13}{2}kx^2 + 8kx - (k - 4)$.
- a. Determina per quale valore di k il polinomio $P(x)$ è divisibile per $(x - 2)$. $[k = -4]$
- b. In corrispondenza del valore trovato
- scomponi $P(x)$ in fattori irriducibili $[P(x) = -2(3x - 1)(x - 2)^2]$
 - semplifica la seguente espressione:
- $\frac{6x - 2}{P(x)} - \left(\frac{x^2 - 4}{3x + 5}\right)^{-1} - (6x^2 + 6x) \left[\left(\frac{2}{x^3 - x^2} - \frac{2}{x^3 + x^2}\right) \cdot \frac{x^2 - 1}{4}\right] : \left(2 - \frac{3x}{x - 2} + \frac{1}{x}\right)$
- $\left[\frac{3x^2 - 24x + 12}{(x + 2)(x - 2)^2}\right]$

Esercizi per il recupero

Altri esercizi per il recupero



VERO O FALSO?

- 1** a. Un'identità è verificata da infiniti valori. ☐ V ☐ F
 b. Un'uguaglianza verificata da infiniti valori è un'identità. ☐ V ☐ F
 c. Due equazioni sono equivalenti se hanno le stesse soluzioni. ☐ V ☐ F
 d. Se due equazioni sono equivalenti hanno lo stesso dominio. ☐ V ☐ F
- 2** a. Le lettere presenti in un'equazione si dicono incognite. ☐ V ☐ F
 b. L'equazione $5x - 0$ è determinata. ☐ V ☐ F
 c. Un'equazione è frazionaria se presenta denominatori. ☐ V ☐ F
 d. Se in un'equazione si scambiano il primo e il secondo membro, l'equazione ottenuta è equivalente a quella di partenza. ☐ V ☐ F
- 3** a. L'equazione $x^2 - 2x - 2x + 5$ ha tra le sue soluzioni $x = 5$. ☐ V ☐ F
 b. Le equazioni $x - 3 = 0$ e $x^2 - 9 = 0$ sono equivalenti. ☐ V ☐ F
 c. Un'equazione che non è verificata per un valore del suo dominio può essere un'identità. ☐ V ☐ F
 d. Un'equazione indeterminata è sempre un'identità. ☐ V ☐ F

QUESITI A RISPOSTA MULTIPLA

- 4** Quali delle seguenti equazioni sono identità?
- ☐ a $x^2 - 6x - 2x(x - 6)$ ☐ b $6 - x - 2$
☐ c $(x + 1)(x - 1) - x^2 - 1$ ☐ d $(x + 1)(x - 1) - 8$

ATTENZIONE!

Il quesito può avere più di una risposta corretta.

- 5** Risolvi i seguenti semplici problemi per mezzo di un'equazione. Trova quel numero x che
- a. aggiunto a 7 dà 10, aggiunto a 347 dà 756;
 b. sottratto a 9 dà 4, sottratto a 721 dà 76;
 c. moltiplicato per 4 dà 36, moltiplicato per 37 dà 962;
 d. diviso per 5 dà 6, diviso per 41 dà 984.

Stabilisci se ciascuno dei numeri segnati a fianco di ogni equazione ne è soluzione o no.

- 6** $3x^3 - 10x^2 = 9x - 4$ $-4; -1; \frac{1}{3}; 1$ ☐ no; ☐ sì; ☐ sì; ☐ no
- 7** $16x^3 - x = 0$ $-\frac{1}{4}; -2; 0; \frac{1}{4}$ ☐ sì; ☐ no; ☐ sì; ☐ sì
- 8** $x^3 - 4x^2 + x - 2$ $-2; -1; 2; 1$ ☐ no; ☐ no; ☐ no; ☐ sì

- 9** Completa la seguente tabella classificando le seguenti equazioni nell'incognita x .

	numerica		letterale	
	intera	frazionaria	intera	frazionaria
$\frac{5}{a}x - \frac{3}{2} = a$				
$\frac{8}{x} - \frac{5}{x-1} = 3$				
$\frac{x}{a} + \frac{1}{x} = 1$				
$\frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x = 1$				
$(x-m)(x+m) = \frac{4}{x+m}$				
$\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}b = bx$				

Trova i valori di x che soddisfano le seguenti relazioni.

- 10** $x - 11 = 0$; $x - 11 \neq 0$ **11** $8x = 1$; $8x \neq 1$
12 $2 - 7x = 0$; $2 - 7x \neq 0$ **13** $6 - 5x = 0$; $6 - 5x \neq 0$

QUESITI A RISPOSTA MULTIPLA

- 14** Quali delle seguenti equazioni sono impossibili?
- ☐ a $2x + 1 = 0$ in \mathbb{N} ☐ b $2x + 3 = 0$ in \mathbb{Z}
☐ c $2x + 8 = 0$ in \mathbb{Z} ☐ d $(x - 3)^3 = 0$ in \mathbb{N}
☐ e $(x - 3)^2 = x(x - 6)$ in \mathbb{Q}

ATTENZIONE!

Il quesito può avere più di una risposta corretta.

Determina il dominio delle seguenti equazioni.

- 15** $\frac{x+6}{x-6} = \frac{1}{2}$ $\frac{2x+3}{x^2-1} = \frac{2}{x+1}$ $|\mathbb{R} - \{6\}; \mathbb{R} - \{\pm 1\}|$
16 $\frac{3x+1}{x^2+5x} = \frac{7}{x+5} - \frac{2}{x}$ $\frac{1}{x^2+8} = \frac{1}{x^2+3} = -5$ $|\mathbb{R} - \{-5; 0\}; \mathbb{R}|$

VERO O FALSO?

- 17** a. Dal primo principio di equivalenza consegue la regola del trasporto. ☐ V ☐ F
 b. Le equazioni $x + 3 = 8$ e $2x + 6 = 16$ sono equivalenti per il primo principio di equivalenza. ☐ V ☐ F
 c. Se i due membri di un'equazione sono polinomi e in essi figura uno stesso termine, lo si può eliminare. ☐ V ☐ F
 d. Applicando il primo principio di equivalenza, si può trasformare un'equazione in una equivalente con il secondo membro uguale a 0. ☐ V ☐ F
 e. Grazie al secondo principio di equivalenza in un'equazione si possono eliminare i denominatori, se questi sono non nulli. ☐ V ☐ F

- 18** a. La soluzione dell'equazione $ax - b = \frac{b}{a}$, per ogni valore di a e di b .
 b. Nell'equazione $ax - b$, se $a \neq 0$ l'equazione è determinata.
 c. Nell'equazione $ax - b$, se $a = 0$ l'equazione è impossibile.
 d. Nell'equazione $ax - b$, se $b = 0$ l'equazione è impossibile o indeterminata.
 e. Il grado di un'equazione è il maggiore esponente che presenta l'incognita nell'equazione.

V F
 V F
 V F
 V F
 V F

In base a quale principio le seguenti coppie sono formate da equazioni equivalenti?

- 19** $\frac{1}{3}x - \frac{5}{3} = x - 5$ **20** $x^2 - 5x + 3 = 6 - x + x^2$ e $-5x + 3 = 6 - x$
21 $8x - 40 = x - 5$ **22** $-7x + 8 = 12x - 11$ e $7x - 8 = -12x + 11$
23 $6x - 9 + x = 7 - 9$ e $6x + x = 7$ **24** $7x - 7 + 3x - 2 = x + 5$ e $7x + 3x = 2 - x + 5 + 7$

Risolvi le seguenti equazioni numeriche intere.

- 25** $7x - 6 = 6x + 4$ [10]
26 $x(x - 2) = (x - 1)^2$ [impossibile]
27 $(4x - 3)(x - 2) = (2x - 3)^2$ [3]
28 $x(3x + 5) = (2x)^2 - (2 - x)^2$ [-4]
29 $8x^3 - 1 = (2x - 1)^3 + 6x(2x - 1)$ [indeterminata]
30 $(2x + 1)(1 - 2x) = (5x - 2)(x - 1) - (3x - 1)^2$ [0]
31 $(2x - 3)^2 = (x + 2)(x - 3) = (3x - 2)(x - 3)$ [impossibile]
32 $(3x - 4)^2 = (3x - 1)(3x + 1) - 2(x + 3) - 5(4x - 3)$ $\left[-\frac{2}{3}\right]$
33 $(2x - 3)(3x + 2) = (2x + 3)(3x - 2) - 3(2x + 3) - 2(3x + 2)$ $\left[-\frac{1}{2}\right]$
34 $\frac{3x - 2}{10} - \frac{2x - 3}{15} = \frac{x - 3}{6}$ [impossibile]
35 $\frac{6x - 7}{3} - \frac{5x - 3}{18} = \frac{2x + 3}{9} + \frac{3x - 5}{2}$ [indeterminata]
36 $\frac{8x - 7}{12} - \frac{5x - 1}{48} = \frac{x}{8} - 1$ [-1]
37 $\frac{5}{2} \left(\frac{2}{5}x - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{6} \left(x + \frac{5}{2} \right)$ [2]
38 $\frac{(3x - 5)(x + 1)}{18} + \frac{(x + 2)(x + 3)}{6} = \frac{(2x + 3)^2}{12}$ $\left[-\frac{1}{10}\right]$
39 $\frac{1}{9} \left[3x - 6 - 5 \left(\frac{7}{2}x - 5 \right) \right] + 2(x - 1) + \frac{1}{6} = 0$ $\left[-\frac{5}{7}\right]$
40 $\frac{1 - 3x}{9} + \frac{2x(x - 1)}{6} = \frac{(x - 1)^2}{3} - 0$ [impossibile]
41 $\frac{(x - 1)^2}{2} - \frac{(x + 2)(x - 2) - 2x}{3} = \frac{(x - 3)^2}{6} - \frac{2x - 1}{2}$ $\left[\frac{1}{10}\right]$

Risolvi le seguenti equazioni.

- 42** $(3x + 9)x = 0$ [-3; 0] **43** $(x - 1)(x + 2)(2x + 5) = 0$ $\left[-\frac{5}{2}; -2; 1\right]$
44 $(x - 10)^3 \left(-x - \frac{1}{2}\right) = 0$ $\left[-\frac{1}{2}; 10\right]$ **45** $x^2(2x^2 + 4x) = 0$ [-2; 0]
46 $x^2 + 8x + 7 = 0$ [-7; -1] **47** $x^2 - 4x + 4 = 0$ [2]
48 $x^3 - 5x^2 + 6x = 0$ [0; 2; 3] **49** $3x^2 + 2x - 1 = 0$ $\left[-1; \frac{1}{3}\right]$

VERO O FALSO?

- 50** a. La soluzione di un'equazione frazionaria che annulli un denominatore non è accettabile. V F
 b. Le condizioni di accettabilità delle soluzioni dell'equazione $\frac{x + 2}{x - 2} = 0$ sono $x \neq \pm 2$. V F
 c. Le C.A. delle soluzioni dell'equazione $\frac{x}{x^2 + 1} = \frac{1}{x}$ sono $x \neq 0 \wedge x \neq \pm 1$. V F
 d. L'equazione $\frac{x}{x - 2} - \frac{2}{x - 2}$ non ha soluzione. V F
 e. L'equazione $\left(\frac{1}{x} - 1\right)\left(\frac{1}{x} + 1\right) - \frac{1}{x^2} - 1$ è indeterminata. V F

Risolvi le seguenti equazioni numeriche frazionarie.

- 51** $\frac{3x}{x + 3} - \frac{x + 3}{3x} = \frac{8}{3}$ $\left[-\frac{3}{10}\right]$
52 $\frac{x + 1}{x - 1} - \frac{2x + 5}{5x - 2} = \frac{3}{5}$ $\left[-\frac{3}{7}\right]$
53 $\frac{x - 1}{x + 2} - \frac{x}{4x - 2} = \frac{3}{4}$ $\left[\frac{2}{5}\right]$
54 $\frac{9x}{3x - 2} - \frac{3x + 2}{x} = \frac{x + 4}{3x^2 - 2x}$ [impossibile]
55 $\frac{2x + 1}{2x - 1} - \left(2 + \frac{3}{x - 2}\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{2x - 1}\right) = 1$ $\left[\frac{3}{2}\right]$
56 $\frac{5}{3x - 9} - \frac{2}{3x} = \frac{x + 2}{x} - \frac{x + 2}{x - 3}$ [2]
57 $\frac{x - 5}{x - 1} - \frac{x - 1}{x - 5} = \frac{x - 21}{x^2 - 6x + 5}$ [impossibile]
58 $\frac{x - 1}{2x - 4} - \frac{x - 3}{2x + 8} + \frac{3}{x^2 - 2x} = \frac{4x + 1}{x^2 + 2x - 8}$ [4]
59 $\frac{x + 2}{x^2 - 1} + \frac{x - 1}{x^2 - x - 2} = \frac{2x + 2}{x^2 - 3x + 2}$ $\left[-\frac{5}{6}\right]$
60 $\frac{2x - 1}{x - 1} + \frac{1}{6} = \frac{x(x - 7)}{6x^2 - 18x + 12} - \frac{2x - 3}{2 - x}$ [impossibile]
61 $\frac{4}{3x^2 - 3} + 2\left(\frac{2}{x + 1} - \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} \left(2 - \frac{1}{x - 1}\right)$ [3]
62 $\frac{1}{x^2 + x} + \frac{x - 1}{x^2 + 2x + 1} = \frac{1}{x}$ [impossibile]
63 $1 + \frac{1 - 2x}{6x - 4x^2} - \frac{2x}{2x - 3} = \frac{1}{2x}$ [-2]
64 $\frac{1 + x}{x + 2} - 2 + \frac{x + 1}{x} = \frac{2}{x^2 + 2x}$ [indeterminata: $x \neq -2 \wedge x \neq 0$]

$$\begin{aligned} 65 \quad & \frac{x+1}{x^2-4} - \frac{2x-3}{2x-x^2} = \frac{3x+7}{x^2+2x} \quad [-8] \\ 66 \quad & \frac{5}{4x-3} - \frac{5x+1}{8x^2-6x} = \frac{6x}{16x^2-9} = \frac{2x+1}{8x^2+6x} \quad [\text{impossibile}] \\ 67 \quad & \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}\right) = \frac{x+3}{x^2-1} - \frac{x+3}{x^2} \quad [4] \end{aligned}$$

VERO O FALSO?

68. a. Un'equazione è letterale se, oltre all'incognita, contiene altre lettere che rappresentano valori noti. V F
 b. L'equazione $ax = a$ ha come unica soluzione $x = 1 \forall a \in \mathbb{R}$. V F
 c. L'equazione $(a^2 + 1)x = a$ ha soluzione $x = \frac{a}{a^2 + 1} \forall a \in \mathbb{R}$. V F
 d. L'equazione $(a - 1)x = a$ per $a = 0$ è impossibile. V F
 69. a. L'equazione $(a - 1)x = a^2 - 1$ per $a = 1$ è indeterminata. V F
 b. L'equazione $\frac{x}{a-1} = a$ per $a = 1$ è indeterminata. V F
 c. L'equazione $\frac{x}{a-1} = a$ per $a = 0$ perde significato. V F
 d. L'insieme delle soluzioni dell'equazione $(x - a - 2)(a + 2 + x) = (a - x)(1 - x) \in S = \{a + 4\}$. V F

Determina per quale valore del parametro le seguenti equazioni nell'incognita x hanno la soluzione indicata.

$$\begin{aligned} 70 \quad & (2x - 5a)(5x + a - 1) = (3x - 2a)^2 + (x + 3a)(x - 3a) \rightarrow x = -\frac{1}{3} \quad \left[\frac{1}{2}\right] \\ 71 \quad & (x - m - 2)(x - m + 2) - (x + m + 2)(x + m - 2) = 1 \rightarrow x = -\frac{1}{4} \quad [-1] \end{aligned}$$

Risolvi le seguenti equazioni letterali intere.

$$\begin{aligned} 72 \quad & (x - 1)^2 = (x - a)(x + a) \quad \left[\frac{1 + a^2}{2}\right] \\ 73 \quad & \frac{x + 2m}{6} - \frac{2x - m}{9} = \frac{2x - 3m}{3} \quad [2m] \\ 74 \quad & (x - 1)^2 = (x + 1 - a)(x - 1) \quad [a = 2, \text{ indeterminata}; a \neq 2, x = 1] \\ 75 \quad & a(x + 2)(x - 2a) + 2(x - a) = 2a(x - a)(2x + 1) + a(a - x)(3x - 1) \\ & \quad [a = -2, \text{ indeterminata}; a = 1, \text{ impossibile}; a \neq -2 \wedge a \neq 1, x = -\frac{a}{a-1}] \\ 76 \quad & ax(x - 1) + (x - 1)^2 = (a + 1)(x + 1)(x - 1) \quad [a = -2, \text{ indeterminata}; a \neq 2, x = 1] \\ 77 \quad & (x + a)^2 - 2(x + 2a)(x - 2a) = 3a(a - 1) - (x - 6)(x + 2a) \quad \left[a = \frac{3}{2}, \text{ indeterminata}; a \neq \frac{3}{2}, x = -\frac{3}{2}a\right] \\ 78 \quad & \frac{3x + 1}{t - 3} - \frac{9x - 2}{t^2 - 3t} = \frac{3x + 1}{t} \quad [t = 0 \vee t = 3, \text{ perde significato}; t \neq 0 \wedge t \neq 3, \text{ impossibile}] \\ 79 \quad & \frac{3x - p}{3p - 6} - \frac{5x - p}{p^2 - p - 2} = \frac{3x - p}{3p + 3} \quad [p = -1 \vee p = 2, \text{ perde significato}; p \neq -1 \wedge p \neq 2, x = 0] \end{aligned}$$

Risolvi le seguenti equazioni letterali frazionarie.

$$80 \quad \frac{3a - 2}{x} + \frac{1 - a}{1 - x} = \frac{a}{x^2 - x} \quad \left[a = \frac{3}{4} \vee a = \frac{1}{2}, \text{ impossibile}; a \neq \frac{3}{4} \wedge a \neq \frac{1}{2}, x = \frac{4a - 2}{4a - 3}\right]$$

$$\begin{aligned} 81 \quad & 2 + \frac{1}{x + b} = \frac{2x}{x - b} \quad \left[b = 0 \vee b = -\frac{1}{2}, \text{ impossibile}; b \neq 0 \wedge b \neq -\frac{1}{2}, x = \frac{b(1 + 2b)}{1 - 2b}\right] \\ 82 \quad & \frac{x^2 + 2a}{x - a} = x + 2a \quad \left[a = -2, \text{ impossibile}; a = 0, \text{ indeterminata } (x \neq 0); a \neq -2 \wedge a \neq 0, x = 2a + 2\right] \\ 83 \quad & \frac{bx + 2}{1 - x} + \frac{2x + 1}{x - b} = 2 - b \quad \left[b = -2 \vee b = -\frac{1}{2}, \text{ impossibile}; b = 1, \text{ indeterminata } (x \neq 1); b \neq -2 \wedge b \neq -\frac{1}{2} \wedge b \neq 1, x = -b - 1\right] \\ 84 \quad & \frac{2b - 1}{b} - \frac{x + b}{x} = \frac{x - 2b}{bx} \quad \left[b = 0, \text{ l'equazione perde significato}; b = 2, \text{ indeterminata } (x \neq 0); b \neq 0 \wedge b \neq 2, x = b\right] \end{aligned}$$

VERO O FALSO?

85. a. Se il numero x supera $\frac{2}{7}x$ di 10 si scrive $x + \frac{2}{7}x = 10$. V F
 b. Due numeri che hanno somma s si possono indicare con x e $(s - x)$. V F
 c. I $\frac{3}{5}$ di un numero x si indicano con $\frac{3}{5}x$. V F
 d. Se i $\frac{2}{3}$ di un numero x sono uguali a 34 si può scrivere $x = \frac{2}{3} \cdot 34$. V F
 86. a. L'equazione risolvente del problema «Trova due numeri sapendo che il primo è $\frac{5}{4}$ del secondo e lo supera di 10» è $\frac{5}{4}x = x - 10$, posto il secondo uguale a x . V F
 b. L'equazione risolvente del problema «trova quel numero x che aumentato di 32 è uguale al suo triplo diminuito di 6» è $x + 32 = 3x - 6$. V F
 c. L'equazione risolvente del problema «Trova due numeri conoscendone la somma 58 e la differenza 12» è $x = (58 - x) = 12$. V F
 d. Il numero di due cifre che ha la cifra delle decine uguale a 3 e quella delle unità uguale a $x \in 3x$, con $x \in \mathbb{N}$. V F

87. Scrivi e risolvi l'equazione associata ai seguenti problemi.

- a. Aggiungendo al suo doppio il suo precedente si ottiene 35. [2x + (x - 1) = 35]
 b. La differenza fra il triplo del suo successivo e il doppio del suo precedente è 11. [3(x + 1) - 2(x - 1) = 11]
 c. Moltiplicandolo per 6 si ottiene il quadrato della sua metà. [6x - (\frac{x}{2})^2]
 d. Dividendo il suo triplo per 5 si ottiene per quoziente la sua metà e per resto 2. [3x - 5 \cdot \frac{x}{2} + 2]

Risolvi i seguenti problemi mediante un'equazione.

88. Se raddoppio un numero e gli sottraggo 12 ottengo i suoi $\frac{5}{3}$. Qual è quel numero? [36]
 89. **MATEMATICA E REALTÀ** Carla si reca in cartoleria con una certa quantità di euro. Ne spende $\frac{1}{4}$ per una scatola di colori e $\frac{1}{6}$ del rimanente per tre quaderni. Rimane con 5 euro: quanto aveva? [8 euro]
 90. In un numero di due cifre la cifra delle decine è doppia di quella delle unità. Scambiando le cifre il numero diminuisce di 36. Qual è il numero? [84]

- 91** Determina l'ampiezza dei tre angoli di un triangolo, sapendo che il primo supera il secondo di 33° e il terzo è $\frac{1}{3}$ del secondo.
[96° , 63° e 21°]
- 92** Determina il perimetro di un trapezio rettangolo, sapendo che l'area è 270 cm^2 , che la base maggiore è $\frac{3}{2}$ della minore e la supera di 9 cm .
[72 cm]
- 93** **MATEMATICA ESPLORA** Per coprire una certa distanza, un treno impiega un tempo uguale al sestuplo del tempo che impiegherebbe un aereo che viaggia a una velocità di 600 km/h superiore a quella del treno. Determina la velocità del treno.
[120 km/h]

QUESITI A RISPOSTA MULTIPLA

- 94** Quale di queste uguaglianze **non** è un'identità?
a $(a-1)^2 - a^2 - 2a + 1$ **b** $(a-1)^2 - a^2 - 1$
c $(a+1)^2 - a^2 + 2a + 1$ **d** $a^2 - 1 - (a+1)(a-1)$
- 95** Qual è la soluzione dell'equazione $\frac{2}{3}x - \frac{7}{15} - \frac{1}{6}x - \frac{1}{6}$?
a $\frac{19}{25}$ **b** $\frac{3}{5}$ **c** $\frac{1}{5}$ **d** $-\frac{1}{5}$
- 96** Quale equazione tra le seguenti si può risolvere in \mathbb{N} ?
a $x + 5 = 0$ **b** $x + 5 = \frac{1}{3}$ **c** $x + 5 = 3$ **d** $x + 5 = 6$
- 97** Quale di queste equazioni è impossibile?
a $5x = 0$ **b** $x + 6 = x + 9$ **c** $x - 2 = 1$ **d** $2x - 8 = 2(x - 4)$
- 98** L'equazione $(x+1)^2 - x^2 + 1$ è
a di secondo grado e determinata **b** impossibile
c di primo grado e determinata **d** indeterminata
- 99** L'equazione $(x-1)^2 - x^2 - 1$ è
a indeterminata **b** impossibile
c di primo grado e determinata **d** di secondo grado e determinata
- 100** Individua l'affermazione errata.
a L'equazione $ax - b - 3$ è indeterminata per $a = 0 \wedge b = 3$.
b L'equazione $\frac{1}{x} - \frac{2}{2x}$ ha per insieme delle soluzioni $\mathbb{R} - \{0\}$.
c Ogni equazione indeterminata ha come insieme delle soluzioni \mathbb{R} .
d L'equazione $x(x-1)^7 = 5(x-1)^3$ ha almeno una soluzione.
e L'equazione $(x+x^2-3)^2 - 7 - x$ ha, tra le sue soluzioni, il valore $x = 2$.

- 101** Per quale valore di a l'equazione $(a+1)x - a^2 - 2a + 1$ è indeterminata?
a $a = -1$ **b** $a = 1$ **c** $a = 0$ **d** Per nessun valore di a
- 102** Per quale valore di a l'equazione $(a^2 - a)x - a^2 - 5a + 4$ è impossibile?
a $a = 0 \vee a = 1$ **b** $a = 1$ **c** $a = 4 \vee a = 1$
d $a = -4 \vee a = -1$ **e** $a = 0$ **f** Nessuna delle risposte precedenti

- 103** L'insieme delle soluzioni dell'equazione $\frac{x-2}{x} - \frac{x}{x+2} - \frac{x-2}{x^2+2x}$ è
a \emptyset **b** $\mathbb{R} - \{0; -2\}$ **c** $\{-2\}$ **d** $\{\frac{1}{2}\}$

- 104** L'equazione risolvente del problema «Se gli allievi di una classe in sala informatica si dispongono due per computer, tre di essi restano senza computer; se si dispongono tre per computer avanzano tre posti. Quanti sono gli allievi e quanti i computer?», posto uguale a x il numero dei computer, è

- a** $2(x+3) - 3(x-3)$ **b** $2x+3 - 3(x-3)$
c $2(x-3) - 3x+3$ **d** $2x+3 - 3x-3$

- 105** L'equazione risolvente del problema «In un triangolo ABC , avente il perimetro lungo 145 cm , il lato AB supera BC di 15 cm ed è $\frac{3}{2}$ di AC . Quanto è lungo il lato AB ?» è

- a** $x+x+15+\frac{2}{3}x=145$ **b** $x+x+15+\frac{3}{2}x=145$
c $x+x-15+\frac{2}{3}x=145$ **d** $x+x-15+\frac{3}{2}x=145$

Esercizi di approfondimento

- 1** Determina k in modo che il polinomio $P(x) = 2x^3 - x^2 + kx + 1 - 3k$ sia divisibile per $x + 2$.
[$-\frac{19}{5}$]
- 2** Determina k in modo che i polinomi $A(x) = x^3 + 2x^2 - x + 3k + 2$ e $B(x) = kx^2 - (3k-1)x + k$, divisi entrambi per $(x+1)$ abbiano il medesimo resto.
[$\frac{5}{2}$]
- 3** Determina il valore del parametro m in modo che le seguenti divisioni abbiano lo stesso resto.

$$\begin{aligned} & [x^3 + (4-m)x^2 + (2-3m)x + 3m - 2] : (x - m + 1) \\ & [x^3 - (5-m)x^2 - (3m-8)x + m - 1] : (x + m - 2) \end{aligned}$$
[$\frac{4}{3}$]
- 4** Considera le frazioni $A = \frac{2x^2 - 3x + 1}{3x^2 - 2x - 1}$ e $B = \frac{3x^2 + 2x - 1}{x^2 - x - 2}$. Dopo aver posto le loro condizioni di esistenza, semplifica e risolvi l'equazione $8A + B = 0$.
[$\frac{3}{5}$]
- 5** Considera l'espressione $E = \left[\left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-x^2} \right) \cdot \frac{x^2}{x+2} + \frac{5x}{x^2-x-6} \right] : \frac{x^2}{2x^2-9x+9}$.
a. Semplifica l'espressione E .
b. Determina le condizioni di esistenza di E .
c. Risolvi le equazioni $E = \frac{1}{2}$, $E = 1$, $E = 2$.

Risolvi e discuti le seguenti equazioni.

- 6** $[x^3 - 2(m+1)x^2 - 2(1-3m)x + 1 - 2m] : (x - 2m + 1) = 11$
 $[m \neq -\frac{1}{2} \wedge m \neq 3, x = -2 \vee x = 5; m = -\frac{1}{2}, x = 5; m = 3, x = -2]$
- 7** $[x^3 - (a-1)x^2 - (6a^2 - 2a + 3)x + 9a - 3] : (x + 1 - 3a) = 2ax + x + 3$
 $[a \neq \frac{4}{3} \wedge a \neq -\frac{1}{3}, x = -2 \vee x = 3; a \neq \frac{4}{3}, x = -2; a \neq -\frac{1}{3}, x = 3]$

Esercizi per il recupero

Altri esercizi per il recupero



VERO O FALSO?

- 1** Una disuguaglianza cambia verso se ai due membri si sostituiscono i rispettivi reciproci.
- 2** L'intervallo $-2 < x \leq 8$ si rappresenta con la notazione $(-2; 8]$.
- 3** Il dominio della disequazione $\frac{x}{x^2+1} < 1$ è $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$.
- 4** La disequazione $(2x-1)^2 > 0$ ha per insieme delle soluzioni \mathbb{R} .
- 5** La disequazione $2x^2 + 3 < 0$ non ha soluzioni.
- 6** La disequazione $x(x+1)(x-1) > (x-1)(x^2+x+1)$ è di terzo grado.

V F
V F
V F
V F
V F
V F

Classifica e poi rappresenta in forma simbolica e grafica gli intervalli individuati dalle seguenti relazioni.

- 7** $x \leq -6$ $x > 0$ $-1 < x \leq 7$ $x \geq 11$
- 8** $5 \leq x \leq 8$ $x > -\frac{1}{2}$ $0 < x \leq \frac{7}{3}$ $x \leq -9$
- 9** $x \geq -7$ $8 < x < 14$ $-10 \leq x < 0$ $x < 12$

VERO O FALSO?

- 10** L'insieme delle soluzioni di una disequazione lineare, se non è \emptyset , non può essere un intervallo limitato.
- 11** Se in una disequazione $Ax > B$ il coefficiente A è nullo, la disequazione ha per insieme delle soluzioni \mathbb{R} o \emptyset .
- 12** L'insieme delle soluzioni della disequazione $2x - 1 > 3x$ è $(-1; +\infty)$.
- 13** L'insieme delle soluzioni della disequazione $(2x-1)^2 < (2x-3)(2x+1)$ è \emptyset .
- 14** L'insieme delle soluzioni della disequazione $2x^2 - x < x(2x-1)$ è \mathbb{R} .

V F
V F
V F
V F
V F

Risolvi le seguenti disequazioni.

- 15** $2 - 4x < 6x + 1$; $12x - 3 > 4x + 5$ $\left[x > -\frac{1}{10}; x > 1 \right]$
- 16** $2(x-5) > 3(x-1) - 5(x+2)$ $\left[x > -\frac{3}{4} \right]$
- 17** $4[-(x+6) - 2(2x-3)] \geq x$ $[x \leq 0]$
- 18** $(x+6)^2 < 7(2x+5) + (x+1)(x-1)$; $(x-2)^3 - 3x(2-x) \geq (x-1)^3 + 2$ $[x > 1; x \geq 3]$
- 19** $\frac{1}{5} \left(\frac{5}{4} - x \right) - 4x \geq \frac{3}{4} - x$; $\frac{x-1}{7} - 7 < \frac{x-23}{5} - 1 - \frac{x}{4}$ $\left[x \leq -\frac{5}{32}; x < 8 \right]$
- 20** $\frac{4x-5}{5} - \frac{5x-4}{4} + \frac{4x+9}{10} > 1$ $[x < -2]$
- 21** $\frac{5-6x}{2} - \frac{1-5x}{6} - \frac{2x-1}{3} > \frac{5x+13}{6} - \frac{1-2x}{2}$ $\left[x < \frac{3}{14} \right]$
- 22** $\left(2x + \frac{1}{2} \right)^2 - \left(x + \frac{1}{2} \right) \left(x - \frac{1}{2} \right) < 3 \left(x + \frac{2}{3} \right)^2$ $\left[x > -\frac{5}{12} \right]$

- 23** $\left(x + \frac{2}{3} \right)^2 + \left(x - \frac{2}{3} \right)^2 - \frac{16-9x}{9} < 3 + 2 \left(x - \frac{2}{3} \right) \left(x + \frac{2}{3} \right)$ $[x < 3]$
- 24** $\frac{1}{2} \left[2x(x-1) - \left(\frac{1}{3}x - 2 \right) \right] < (x-1)^2$ $[x < 0]$

Risolvi graficamente le seguenti disequazioni lineari.

- 25** $x + 2 > 0$ $[x > -2]$ **26** $-x + 3 \leq 0$ $[x \geq 3]$
- 27** $3x - 1 < 0$ $\left[x < \frac{1}{3} \right]$ **28** $4 - \frac{1}{2}x > 0$ $[x < 8]$

VERO O FALSO?

- 29** Per risolvere la disequazione $3x < a + 1$ è sufficiente applicare il secondo principio di equivalenza delle disequazioni.
- 30** La disequazione $a^2x < 5a^3$ è verificata per $x < 5a$.
- 31** Le disequazioni $x < a$ e $a^2x < a^3$ sono equivalenti.
- 32** L'insieme delle soluzioni della disequazione $(-a^2-1)x > 0$ è $S = (-\infty; 0)$.
- 33** La disequazione $(a^2-1)x > a-1$ per $a-1$ è verificata $\forall x \in \mathbb{R}$.
- 34** La disequazione $(a^2-1)x > a-1$ per $a=-1$ è verificata $\forall x \in \mathbb{R}$.

V F
V F
V F
V F
V F
V F

Risolvi e discuti le seguenti disequazioni letterali intere.

- 35** $(x+4)(a-3) < (x-3)(a+4)$ $[x > a]$
- 36** $2x(a+1) - a(2x-1) < a$ $[x < 0]$
- 37** $(x+2a)(2a-1) - x(a+1)(a-1) - 2a(x-1) \leq x-4$ $[x \geq 4]$
- 38** $(3x-2a)^2 + (4x+a)^2 \leq (5x-a)^2 + 4a^2$ $[a < 0, x \geq 0; a = 0, \forall x \in \mathbb{R}; a > 0, x \leq 0]$
- 39** $(x-2a)^2 - (x+2a)(x-2a) + 16a \geq 4(x+2a)$ $[a < -1, x \geq 2a; a = -1, \forall x \in \mathbb{R}; a > -1, x \leq 2a]$

VERO O FALSO?

- 40** L'insieme delle soluzioni di un sistema di due o più disequazioni in un'incognita è formato dalle soluzioni comuni a tutte le disequazioni.
- 41** Un sistema di disequazioni è impossibile soltanto se lo è ogni disequazione.
- 42** L'insieme delle soluzioni del sistema $\begin{cases} 10-x > 0 \\ 1-x \leq 0 \end{cases}$ è $S = (1; 10)$.
- 43** L'insieme delle soluzioni del sistema $\begin{cases} 3-x > 0 \\ 4-x \leq 0 \end{cases}$ è $S = \emptyset$.
- 44** L'insieme delle soluzioni del sistema $\begin{cases} 3-x > 0 \\ x-3 \geq 0 \end{cases}$ è $S = \mathbb{R}$.
- 45** L'insieme delle soluzioni del sistema $\begin{cases} 3-x \geq 0 \\ x-3 \geq 0 \end{cases}$ è $S = \{3\}$.

V F
V F
V F
V F
V F
V F

Risolvi i seguenti sistemi di disequazioni lineari numeriche.

- 46 $\begin{cases} 5x - 6 < 3x \\ 4x + 5 < 9x \end{cases} \quad \begin{cases} 6 - 3x < 10 \\ 2 + x > 1 + 5x \end{cases} \quad \left[1 < x < 3; -\frac{4}{3} < x < \frac{1}{4} \right]$
- 47 $\begin{cases} 7(3x + 9) > 4(5x + 16) \\ 9\left(\frac{7x}{2} - 3\right) < 5 - \frac{1}{2}x \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{x-3}{4} - x < \frac{x-1}{2} - \frac{x-2}{3} \\ 2-x > 2x-8 \end{cases} \quad [\text{impossibile}; -1 < x < \frac{10}{3}]$
- 48 $\begin{cases} \frac{x+1}{3} + \frac{4-x}{2} \geq x \\ 2 - \frac{x+5}{2} < x+1 \end{cases} \quad \begin{cases} (1+x)(1-x) < 2 \\ x^2 + 1 \geq 2x \end{cases} \quad [-1 < x \leq 2; \forall x \in \mathbb{R}]$
- 49 $\begin{cases} 3x + 1 < 7 - 2x \\ 2x + 5 < x - 4 \\ 4x + 7 > x - 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 13 - 2x > 1 \\ 3(x-1) < 4x + 7 \\ x(4-x) \geq 4 - x^2 \end{cases} \quad [\text{impossibile}; 1 \leq x < 6]$

Risolvi le seguenti disequazioni numeriche frazionarie o intere.

- 50 $\frac{x-2}{x-3} > 0; \frac{2x-3}{x+1} \leq 0 \quad \left[x < 2 \vee x > 3; -1 < x \leq \frac{3}{2} \right]$
- 51 $\frac{3-x}{1-2x} \geq 0; \frac{2+x}{3-4x} < 0 \quad \left[x < \frac{1}{2} \vee x \geq 3; x < -2 \vee x > \frac{3}{4} \right]$
- 52 $\frac{x+2}{2-x} > 1; \frac{4-x}{3x-2} \leq 3 \quad \left[0 < x < 2; x < \frac{2}{3} \vee x \geq 1 \right]$
- 53 $\frac{x+2}{x-2} - \frac{5}{x-2} \leq 0; \frac{x-2}{x+3} \geq -\frac{1}{2} \quad \left[2 < x \leq 3; x < -3 \vee x \geq \frac{1}{3} \right]$
- 54 $\frac{2x-3}{8-4x} + \frac{5x-16}{6x-12} - \frac{x}{2-x} < 1 \quad \left[-\frac{1}{4} < x < 2 \right]$
- 55 $\frac{2-x}{x+2} - 1 < \frac{1-3x}{6+3x}; \frac{3-x}{5} + x \leq \frac{4x^2}{5x+15} \quad \left[x < -2 \vee x > -\frac{1}{3}; -3 < x \leq -\frac{3}{5} \right]$
- 56 $x^2 - x > 0; 16 - x^2 > 0 \quad [x < 0 \vee x > 1; -4 < x < 4]$
- 57 $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) > 0 \quad [x < 1 \vee 2 < x < 3 \vee x > 4]$
- 58 $(x-1)(x+2)(x-3)^2(x-4) > 0 \quad [-2 < x < 1 \vee x > 4]$

Risolvi i seguenti sistemi di disequazioni.

- 59 $\begin{cases} 36 - x^2 < 0 \\ \frac{7}{x} \geq 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 6x - x^2 > 0 \\ \frac{x-5}{2-x} \leq 0 \end{cases} \quad [6 < x \leq 7; 0 < x < 2 \vee 5 \leq x < 6]$
- 60 $\begin{cases} x^2 - x - 6 \geq 0 \\ \frac{x}{2x+5} < \frac{1}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{x-2}{3-x} \geq 0 \\ \frac{2-x}{x^2+4} \geq 0 \end{cases} \quad \left[-\frac{5}{2} < x \leq -2 \vee x \geq 3; x = 2 \right]$

QUESITI A RISPOSTA MULTIPLA

- 61 Quale delle seguenti disequazioni non ha soluzioni?
- a $(x+1)^2 + (2x-1)^2 \leq 0$ b $(x-1)^2 + (x^2-1)^2 \leq 0$
- c $x^2 - 2x + 1 \leq 0$ d $x^4 - 1 > 0$
- 62 Quale delle seguenti disequazioni ha come insieme delle soluzioni \mathbb{R} ?
- a $(x+1)^2 + (2x-1)^2 > 0$ b $(x-1)^2 + (x^2-1)^2 > 0$
- c $x^2 - 2x + 1 > 0$ d $x^4 - 1 < 0$

63 Il grafico rappresenta le soluzioni della disequazione

- a $2x + 2 \leq 0$ b $2x + 2 \geq 0$ c $2x + 2 < 0$ d $2x + 2 > 0$

Esercizi di approfondimento

- 1 Considera i predicati $p(x): \frac{1}{3}x - \frac{1}{5}x > 2 - x$ e $q(x): \frac{x-4}{5} - \frac{x}{20} < \frac{5-x}{4}$ con $x \in \mathbb{R}$. Determina
- a. l'insieme di verità V_1 del predicato $p(x) \wedge q(x)$;
 b. l'insieme di verità V_2 del predicato $p(x) \vee q(x)$;
 c. l'insieme di verità V_3 del predicato $p(x) \wedge q(x)$.
- $[V_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{30}{17} < x < \frac{41}{8}\}; V_2 = \mathbb{R}; V_3 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \frac{30}{17}\}]$
- 2 Considera i predicati $p(x): x - 4(1-x)^2 \geq (2x+3)(3-2x)$ e $q(x): \frac{3}{4}x - 2 < \frac{x-1}{2} + x$ con $x \in \mathbb{R}$. Determina
- a. l'insieme di verità V_1 del predicato $p(x) \wedge q(x)$;
 b. l'insieme di verità V_2 del predicato $p(x) \wedge q(x)$;
 c. l'insieme di verità V_3 del predicato $p(x) \vee q(x)$.
- $[V_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \frac{13}{9}\}; V_2 = V_3 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 2\}]$
- 3 Considera gli insiemi $A = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{2x-3}{5} \leq 1 + \frac{x-2}{3}\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x - \frac{15}{2} \geq 20,5 - x\}$ e determina $A \cap B$ e $A \cup B$.
- $[A \cap B = \{14\}; A \cup B = \mathbb{R}]$
- 4 Determina per quali valori del parametro b l'equazione $(2-3b)x + b - 2 = 0$ ha la soluzione soddisfacente la condizione $x \leq -1 \vee x > 2$.
- $[\frac{2}{5} < b \leq 1 \wedge b \neq \frac{2}{3}]$
- 5 Considera la disequazione $ax > a + 2x$ e determina i valori del parametro a in modo che il suo insieme S delle soluzioni sia tale che $S \subseteq (3; +\infty)$.
- $[2 < a \leq 3]$
- 6 Dati i predicati
- $p(x): \frac{x^2}{x-1} \geq 0 \quad q(x): \frac{x^2-4x+4}{x+1} > 0 \quad x \in \mathbb{R} - \{-1; 1\}$
- determina l'insieme V di verità di $p(x) \wedge q(x)$.
- $[V = \{0\} \cup (1; 2) \cup (2; +\infty)]$
- 7 Dati gli insiemi $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 9 - x^2 \geq 0\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 4x \leq 0\}$ determina $A \cup B, A \cap B, A - B, B - A$.
- $[A \cup B = [-3; 4]; A \cap B = [0; 3]; A - B = [-3; 0]; B - A = [-2; 0]]$
- 8 Dati gli insiemi $A = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{x}{x+3} > 0\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 4 - x^2 \geq 0\}$ determina $A \cup B, A \cap B, A - B, B - A$.
- $[A \cup B = (-\infty; -3) \cup [-2; +\infty); A \cap B = (0; 2]; A - B = (-\infty; -3) \cup (2; +\infty); B - A = [-2; 0]]$
- 9 Dati gli insiemi $A = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{x-3}{x} > 0\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x^2 - x\}$ determina gli insiemi complementari, rispetto all'insieme \mathbb{R} , di $A \cup B$ e $A \cap B$.
- $[\overline{A \cup B} = [0; 2]; \overline{A \cap B} = (-1; 3]]$

- 10** Considerati i numeri reali a, b, c, d , comunque scelti, se $a > b$ e $c > d$ allora:

a. $a + d > b + c$ b. $a - d > b - c$ c. $ad > bc$ d. $\frac{a}{d} > \frac{b}{c}$

Una sola alternativa è corretta: individuala e motiva esaurientemente la risposta.
(Esame di stato liceo scientifico, 2002 – sessione ordinaria)

$[a - d > b - c]$

- 11** Siano a, b, c, d quattro numeri reali tali che $a < -c$ e $2b > d$. Individua il valore di verità delle seguenti proposizioni.

a. $2a < -2(c - 1)$ [V] b. $a + d < 2b - c$ [V] c. $\frac{1}{2}d > b - \frac{a + c}{2}$ [F] d. $2a + 2c > 4b - 2d$ [F]

- 12** Qual è il minimo valore che occorre attribuire al numero naturale n affinché l'espressione

$$\frac{n}{6n - 4} \cdot \frac{2(n - 1)}{3n + 2} : \frac{n}{12n - 8}$$

rappresenti una frazione positiva apparente?

[6]

- 13** Quali valori occorre attribuire al numero naturale n affinché l'espressione

$$\frac{2 - \frac{3}{n + 2}}{2 + \frac{5}{n - 2}} - \frac{\frac{1}{n + 1} + 1}{1 - \frac{4}{n + 1}}$$

rappresenti un numero negativo?

$[n - 0 \vee n > 3]$

- 14** Considera la somma dei primi n numeri naturali, a partire da 1:

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \dots + (n - 2) + (n - 1) + n$$

- a. Calcola la somma S_n in funzione di n , verificando che risulta $S_n = \frac{n(n + 1)}{2}$. (Osserva che i termini della somma equidistanti da quelli estremi hanno somma costante uguale a $n + 1$; somma poi membro a membro $S_n = 1 + 2 + 3 + \dots + (n - 2) + (n - 1) + n$ con $S_n = n + (n - 1) + (n - 2) + \dots + 3 + 2 + 1$.)

- b. Determina il più grande numero naturale in corrispondenza al quale è verificata la disuguaglianza $\frac{1 + 2 + 3 + \dots + (n - 2) + (n - 1) + n}{3n} < 421$.
 $[n = 2524]$

- 15** Verifica che per ogni valore del numero naturale n , con $n \neq 0$, l'espressione $\frac{n}{n + 1} + \frac{2}{n + 2} - \frac{3}{n + 3}$ assume un valore maggiore di 0.

- 16** Risolvi e discuti l'equazione $\frac{3a - 2}{x} + \frac{a - 1}{x - 1} + \frac{a}{x - x^2} = 0$. Determina poi per quali valori del parametro a la soluzione α dell'equazione soddisfa la condizione $\alpha > \frac{1}{\alpha}$.

$\left[a - \frac{1}{2} \vee a - \frac{3}{4}, \text{ impossibile}; \right.$
 $\left. a \neq \frac{1}{2} \wedge a \neq \frac{3}{4}, x = \frac{4a - 2}{4a - 3}; \alpha > \frac{1}{\alpha} \text{ per } \frac{1}{2} < a < \frac{5}{8} \vee a > \frac{3}{4} \right]$

- 17** Determina per quale valore del parametro positivo b le seguenti disequazioni sono equivalenti.

$$(x - 1)^2 - \frac{4}{3}(x - 2)(3 + x) - 5 > \frac{3}{8}(4x^2 - 16x + 8) - \frac{1}{3}\left(8x^2 - \frac{7}{2}x - 4\right) \quad \frac{x - 6b}{x + 2} > -2b$$

$[b = \frac{1}{8}]$

- 18** **MATEMATICA E ECONOMIA** Un certo titolo di stato frutta un interesse del 3,7% annuo. La banca trattiene però da tali interessi la cifra fissa di 40 euro annui per rimborso spese. Un secondo titolo di risparmio, emesso direttamente dalla banca, frutta invece un interesse netto del 3,2% annuo e per esso non vengono richiesti rimborsi spese. Quanto capitale occorre investire affinché sia più conveniente il titolo di stato? $[più di 8000 \text{ euro}]$

- 19** Il 40% della popolazione di un Paese ha 60 anni o più. Può l'età media della popolazione di quel Paese essere uguale a 30 anni? Si illustri il ragionamento seguito per dare la risposta.
(Esame di stato liceo scientifico pni, 2005 – sessione ordinaria)

$[\text{è possibile se l'età media } m_1 \text{ degli individui con 60 anni o più è minore di 75 anni e se l'età media } m_2 \text{ degli individui con meno di 60 anni è } m_2 = 50 - \frac{2}{3}m_1; \text{ in tal caso risulta } m_2 \leq 10]$

- 20** Nel triangolo ABC , il lato AB è doppio del lato AC e il lato BC supera di 3 cm il lato AB . Determina la misura in centimetri del lato AC ($\overline{AC} = x$) in modo che il perimetro del triangolo sia maggiore di 48 cm. Verifica poi che un tale triangolo ABC può esistere se è $AC > 3$ cm.
 $[x > 9]$

- 21** Del triangolo ABC si sa che il perimetro è minore o uguale a 44 cm, che $AB \cong \frac{1}{3}BC$, che $AC \cong BC - \frac{5}{7}AB$ e che $AB + AC > \frac{138}{7}$ cm. Quali valori può assumere la misura, in centimetri, del lato BC ? (Poni $\overline{BC} = x$).
 $[18 < x \leq 21]$

- 22** Determina su un segmento AB , di misura $8a$, un punto C in modo che sia verificata la relazione $\frac{1}{2}\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 > \overline{CB}^2 + 2a^2$.
 $[\frac{17}{8}a < \overline{AC} < 8a]$

- 23** In un rettangolo $ABCD$ la base AB misura $6h$ e l'altezza è $\frac{3}{5}$ della base. Determina un punto P , interno ad $ABCD$, in modo che la distanza PM di P dal lato AB superi di $2h$ la distanza PN di P dal lato AD e che la differenza tra le aree dei triangoli ABP e APD sia minore di $\frac{72}{10}h^2$.
 $[0 < \overline{PN} < h]$

- 24** Un rettangolo $ABCD$ di base $\overline{AB} = 9a$ è equivalente a un quadrato di lato $7a$. Determina su AB un punto H in modo che il rapporto tra l'area trapezio $ADCH$ e quella del triangolo BCH sia minore di 5. $[3a < \overline{HB} < 9a]$

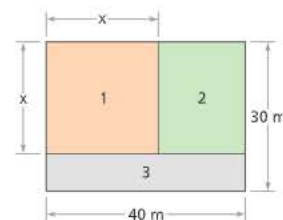
- 25** Risolvi e discuti la disequazione $\frac{ax - 2a - 1}{x - 3a} > 0$ $\left[a < -\frac{1}{3}, 3a < x < \frac{2a + 1}{a}; a = -\frac{1}{3}, \text{ impossibile}; \right.$
 $\left. -\frac{1}{3} < a < 0, \frac{2a + 1}{a} < x < 3a; a = 0, x < 0; 0 < a < 1, x < 3a \vee x > \frac{2a + 1}{a}; \right.$
 $\left. a = 1, x \neq 3; a > 1, x < \frac{2a + 1}{a} \vee x > 3a \right]$

- 26** Aldo vuole ricavare dal suo terreno una zona rettangolare lunga almeno 120 m da recintare con una rete che ha lunghezza massima di 400 m. Egli vorrebbe piantarvi il minimo numero di piante di pomodoro, che richiedono almeno un'area di 9000 m². Tra quali valori in metri può oscillare la larghezza l della zona? $[75 \leq l \leq 80]$

- 27** La famiglia Verdi deve costruire una villetta in un appezzamento di terreno di 40 m \times 30 m. Con riferimento alla figura, alla casa viene riservato un quadrato 1 di lato lungo x metri, al giardino la zona 2 e alla parte lastricata la zona 3. Se si vuole che la casa abbia un'area maggiore di quella della parte lastricata e che la somma dell'area del giardino e della parte lastricata sia maggiore del 25% dell'intera area, quale può essere la misura in metri del lato della casa?

(Nel risultato utilizza valori approssimati a meno di $\frac{1}{10}$.)

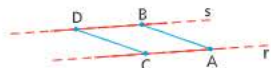
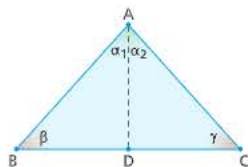
$[20 < x < 30]$



Esercizi per il recupero

Dopo aver riformulato l'enunciato dei seguenti teoremi nella forma «se... allora...», scrivi le ipotesi e la tesi di ciascuno di essi riferendoti alle figure.

- In un triangolo isoscele la bisettrice dell'angolo al vertice divide la base in due parti congruenti.
- Segmenti paralleli compresi tra rette parallele sono congruenti tra loro.



- Determina se le seguenti curve sono aperte o chiuse, semplici o intrecciate.



- Determina l'ampiezza dell'angolo esplementare di un angolo retto, di un angolo piatto, di un angolo di 45° e di un angolo di 133° .

- Disegna l'asse di simmetria delle seguenti figure.

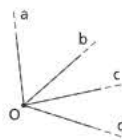


- Disegna, su una retta, i punti A, B, C, D in modo che si susseguano nell'ordine indicato e che sia $AB \cong CD$.

- Qual è il segmento $AB + BC$? E qual è il segmento $BC + CD$?
- Perché si può affermare che $AC \cong BD$?

- Su una retta si susseguono, nell'ordine, i punti A, B, C, D, E e si ha $AB - CD = 35$ cm e $BC - DE = 18$ cm. Determina le lunghezze di AC, BD e BE . [53 cm; 53 cm; 71 cm]

- Il punto O è origine comune delle quattro semirette a, b, c, d che si susseguono in verso orario nell'ordine indicato (vedi figura a lato). Se $\widehat{ab} = 55^\circ$, $\widehat{bc} = 30^\circ$ e $\widehat{ad} = 115^\circ$, quanto valgono le ampiezze degli angoli \widehat{ac} e \widehat{cd} ? [85°; 30°]



Esercizi di approfondimento

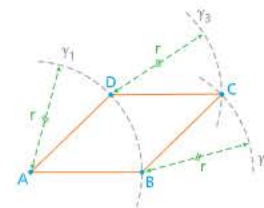
Scrivi le ipotesi e la tesi dei seguenti teoremi e costruisci la figura relativa.

ESERCIZIO SVOLTO

- Un parallelogramma con le diagonali perpendicolari è un rombo.

Occorre disegnare un parallelogramma con le diagonali perpendicolari. Tuttavia, poiché tale parallelogramma, come stabilito dal teorema appena enunciato, è necessariamente un rombo, dobbiamo disegnare un rombo. Eseguiamo la costruzione con riga e compasso indicata in figura:

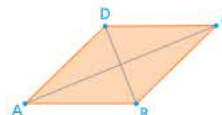
- fissiamo un punto A e tracciamo una circonferenza γ_1 di centro A e raggio r qualsiasi;
- indichiamo con B un punto della circonferenza, sia D un altro punto della circonferenza tale che $BD < 2r$;
- tracciamo una circonferenza γ_2 di centro B e raggio r (lo stesso raggio del punto a.);
- tracciamo una circonferenza γ_3 di centro D e raggio r ;
- osservato che le circonferenze γ_2 e γ_3 passano entrambe per il punto A , sia C il loro ulteriore punto di intersezione;
- congiungiamo ora A con B, B con C, C con D e D con A .



Dobbiamo ora formulare le ipotesi e la tesi. L'enunciato del teorema può essere riformulato nel modo seguente:

se $ABCD$ è un parallelogramma e $ABCD$ ha le diagonali perpendicolari allora $ABCD$ è un rombo

Dopo aver completato la figura tracciando le diagonali (vedi figura sotto) possiamo scrivere le ipotesi e la tesi.



Ipotesi: $ABCD$ è un parallelogramma
 AC è perpendicolare a BD
Tesi: $ABCD$ è un rombo

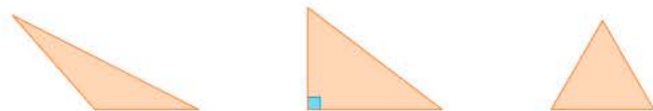
Possiamo riformulare le ipotesi e la tesi, tenendo presente che un parallelogramma è un quadrilatero con i lati opposti paralleli, e un rombo è un quadrilatero con i quattro lati congruenti; utilizzando il simbolo \parallel di parallelismo e il simbolo \perp di perpendicolarità, ipotesi e tesi diventano:

Ipotesi: $AB \parallel CD; DA \parallel BC; AC \perp BD$
Tesi: $AB \cong BC \cong CD \cong DA$

- Se la bisettrice di un angolo di un triangolo divide il lato opposto in due parti congruenti, allora il triangolo è isoscele.
- Se la bisettrice di un angolo di un triangolo è perpendicolare al lato opposto, allora il triangolo è isoscele.
- Un quadrilatero che ha i lati opposti congruenti ha i lati opposti paralleli.
- Se due triangoli hanno rispettivamente congruenti due lati e l'angolo tra essi compreso, allora sono congruenti.
- Giustifica la seguente proposizione: l'intersezione tra due figure convesse è una figura convessa.
- Quante diagonali ha un esagono? E un poligono di nove lati? E in generale uno di n lati?

Esercizi per il recupero

- 1 Dati i triangoli in figura, disegna l'altezza e la mediana rispetto a ogni lato e la bisettrice di ogni angolo.



- 2 Due triangoli rettangoli hanno l'ipotenusa congruente. Sono congruenti? Quale ipotesi dobbiamo aggiungere?

- 3 Quali ipotesi dobbiamo aggiungere affinché due triangoli equilateri siano congruenti?

- 4 I segmenti $AB, BC, CD, DE, EA, EB, DB$ della figura sono congruenti.

a. Quanti triangoli equilateri vedi?

b. Per quale criterio di congruenza puoi affermare che questi triangoli equilateri sono congruenti?

c. Quanti triangoli isosceli non equilateri vedi?

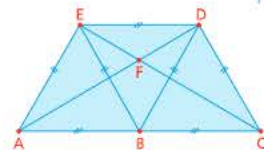
d. Perché si può dire che gli angoli \widehat{AED} e \widehat{EDC} sono congruenti?

$[\widehat{AED} \cong \widehat{EDC}$ perché sono somme di angoli
rispettivamente congruenti]

e. Per quale criterio di congruenza puoi affermare che i triangoli AED ed EDC sono congruenti?

f. I triangoli AEC e ADC sono congruenti? Per quale criterio?

$[AEC \cong ADC$ per il 1° criterio]

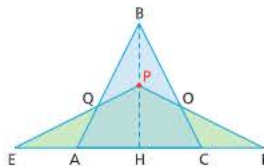


- 5 Considera un triangolo isoscele ABC , in cui l'altezza BH sia congruente alla base. Il punto P coincide con il punto medio dell'altezza e $PH \cong CD \cong EA$. Completa la figura e dimostra che EPD è un triangolo isoscele e che $BPO \cong DCO$.

a. Quanti sono i segmenti congruenti tra loro?

b. Quanti triangoli congruenti si possono individuare?

c. Quali sono?



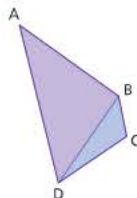
- 6 È dato il triangolo ABC isoscele sulla base BC . Sui suoi lati AB e AC prendi rispettivamente due segmenti AD e AE , tra loro congruenti. Dimostra che $DC \cong EB$.

- 7 Dato un triangolo ABC traccia, dagli estremi di BC , nel semipiano di origine BC che non contiene A , due semirette b e c che formino, con il segmento BC , angoli rispettivamente congruenti ad \widehat{ABC} e \widehat{ACB} . Detto D il punto d'intersezione di b e c , dimostra che i triangoli BAD e CAD sono isosceli.

- 8 Sia ABC un triangolo isoscele di vertice A . Prolunga il lato AB di un segmento $BD \cong AB$ e dimostra che $DC > AB$.

- 9 Sia ABC un triangolo e CM la mediana relativa al lato AB . Dimostra che se CM è minore della metà di AB , l'angolo in C è maggiore della somma degli altri due.

- 10 Considera il quadrilatero $ABCD$ in figura, nel quale AD è il lato maggiore e BC quello minore. Dimostra che $\widehat{ABC} > \widehat{ADC}$ e che $\widehat{BCD} > \widehat{BAD}$.



- 11 Dimostra che se da un punto esterno a una retta si conducono due segmenti obliqui congruenti, le loro proiezioni sulla retta sono congruenti.

- 12 Dimostra che se in un triangolo ABC la mediana CM relativa al lato AB è anche bisettrice dell'angolo \widehat{ACB} , il triangolo ABC è isoscele.

Esercizi di approfondimento

- 1 Dimostra che due triangoli isosceli sono congruenti se hanno congruenti gli angoli alla base e la bisettrice relativa a essi.

- 2 Dimostra che due triangoli sono congruenti se hanno rispettivamente congruenti due angoli e la bisettrice relativa a uno di essi.

- 3 Dimostra che in un triangolo ciascuna mediana è minore della semisomma dei due lati che concorrono nello stesso vertice. (Suggerimento: prolunga la mediana di un segmento congruente a essa dalla parte opposta del triangolo rispetto al suo punto di intersezione con il lato.)

- 4 Dimostra che in un triangolo la somma delle tre mediane è minore del perimetro e maggiore del semiperimetro del triangolo.

- 5 Dimostra che se due lati di un triangolo sono disuguali, l'altezza uscente dal vertice a essi comune forma con il lato maggiore un angolo maggiore di quello che forma con il lato minore.

- 6 Due triangoli isosceli hanno la base comune e i vertici da una stessa parte rispetto alla base comune. Dimostra che i prolungamenti dei lati congruenti di uno dei due triangoli tagliano i lati congruenti in segmenti rispettivamente congruenti.

- 7 Due triangoli rettangoli hanno le ipotenuse congruenti e un cateto del primo triangolo è maggiore di un cateto del secondo. Dimostra che il rimanente cateto del primo è minore del rimanente cateto del secondo.

- 8 Dato il triangolo isoscele ABC di base BC , costruisci, esternamente a esso, i triangoli equilateri ABP e ACQ . Dimostra che $PC \cong BQ$ e che, detto N il punto d'intersezione di PC e BQ , i triangoli BCN e PQN sono isosceli.

- 9 Sia Q il punto in cui la bisettrice dell'angolo in C del triangolo ABC incontra il lato AB . Dimostra che se $AC < BC$ allora è $CQ \cdot A < CQ \cdot B$. (Suggerimento: considera sulla semiretta CA un punto D in modo che sia $CD \cong CB$ e considera poi il triangolo CDQ .)

Verso la Prova Invalsi

Soluzioni degli esercizi



VERO O FALSO?

- 1 a. In un triangolo equilatero ABC ogni bisettrice è anche mediana.
b. Un triangolo rettangolo è anche ottusangolo.
c. Se due triangoli hanno tutti gli angoli rispettivamente congruenti allora sono necessariamente congruenti e sono equilateri.

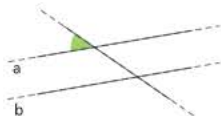
V F

V F

V F

Esercizi per il recupero

- 1** Le rette a e b in figura sono parallele.
- Contrassegna, in rosso, gli angoli congruenti a quello evidenziato.
 - Contrassegna, in blu, gli angoli supplementari a quello evidenziato.

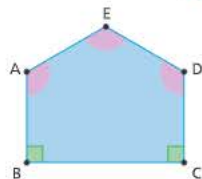


- 2** La somma delle ampiezze degli angoli interni di un poligono convesso è 1080° . Quanti lati ha il poligono?

[8]

- 3** Il pentagono in figura ha gli angoli con i vertici in B e C retti, mentre gli altri tre angoli sono tra loro congruenti. Calcola l'ampiezza di ciascuno degli angoli di vertici A , E , D .

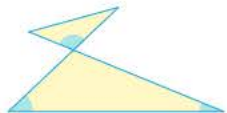
[120°]



QUESITI A RISPOSTA MULTIPLA

- 4** Qual è la somma delle ampiezze degli angoli evidenziati nella figura?

- | | |
|----------------------|----------------------|
| a 90° | b 180° |
| c 270° | d 360° |



- 5** Dimostra che le bisettrici di due angoli corrispondenti, formati da due rette parallele con una trasversale, sono parallele. Puoi affermare la stessa cosa per le bisettrici di due angoli alterni esterni?
- 6** Dimostra che se due rette sono parallele, ogni retta, complanare con esse, che ne incontra una deve incontrare anche l'altra (**TEOREMA 3**). (Suggerimento: procedi per assurdo...)
- 7** Nel triangolo ABC prolunga il lato AB , dalla parte di A , di un segmento $AD \cong AC$ e congiungi D con C . Dimostra che la bisettrice dell'angolo BAC è parallela a CD . (Suggerimento: ricorda il **SECONDO TEOREMA DELL'ANGOLO ESTERNO**.)
- 8** Dimostra che le bisettrici di due angoli coniugati interni, formati da due rette parallele con una trasversale, sono perpendicolari.
- 9** È dato un triangolo ABC , isoscele sulla base AB . La bisettrice dell'angolo esterno \widehat{CBD} , con D sul prolungamento della base AB , risulta parallela al lato AC . Dimostra che il triangolo ABC in tal caso risulta equilatero.
- 10** Sui lati congruenti AB e AC di un triangolo isoscele considera due segmenti congruenti BD e CE . Dimostra che $DE \parallel BC$.

Esercizi di approfondimento

- 1** Sui lati congruenti AB e AC di un triangolo isoscele prendi due segmenti congruenti BD e CE . Congiungi i punti D ed E col punto medio M della base BC . Dimostra che $ME \cong MD$ e che i due triangoli ADM e AEM sono congruenti.
- 2** Dimostra che l'angolo ottuso formato da due bisettrici di un triangolo è congruente a un angolo retto aumentato della metà del terzo angolo del triangolo.
- 3** Sia ABC un triangolo rettangolo in B ; sull'ipotenusa AC riporta $AD \cong AB$, $CE \cong BC$ e conduci BE e BD ; dimostra che l'angolo DBE è la metà di un angolo retto.

- 4** Dimostra che due triangoli sono congruenti se hanno rispettivamente congruenti un lato e le altezze relative agli altri due lati.
- 5** Dato il triangolo isoscele ABC di base BC e i punti $M \in AB$ e $N \in AC$ equidistanti da A , dimostra che il segmento PQ avente per estremi i piedi delle perpendicolari tracciate da M e da N rispettivamente ad AC e ad AB è parallelo alla base BC .
- 6** Date due rette parallele a e b , traccia, da un punto A di a , i segmenti AC e AB rispettivamente perpendicolare e obliquo alla retta b ; sia D un punto della retta a tale che BD intersechi il segmento AC in E e che sia $ED \cong 2 \cdot AB$. Dimostra che l'angolo EBC è un terzo dell'angolo ABC . (Suggerimento: congiungi il punto medio di ED con A e ricorda la proprietà caratteristica del triangolo rettangolo.)

Verso la Prova Invalsi

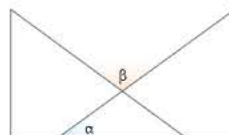
Soluzioni degli esercizi



QUESITI A RISPOSTA MULTIPLA

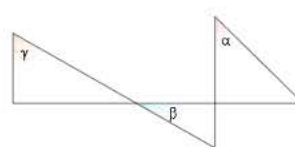
- 1** Osserva la figura. Qual è l'ampiezza dell'angolo β se l'angolo α ha un'ampiezza di 38° ?

- | |
|----------------------|
| a 76° |
| b 104° |
| c 114° |
| d 142° |



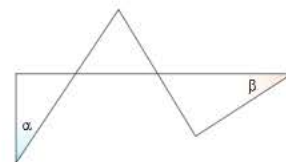
- 3** La figura è formata da tre triangoli rettangoli di cui solo uno isoscele. Sapendo che $\gamma = 60^\circ$, quanto vale l'ampiezza dell'angolo $\alpha + \beta - \gamma$?

- | |
|---------------------|
| a 0° |
| b 15° |
| c 30° |
| d 45° |



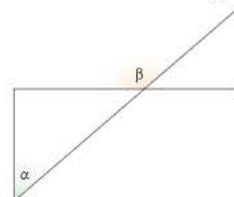
- 2** La figura è costituita da due triangoli rettangoli e da un triangolo equilatero. Quali sono le ampiezze dell'angolo α e dell'angolo β ?

- | |
|---|
| a Entrambe 30° |
| b Entrambe 60° |
| c $\alpha = 30^\circ$; $\beta = 60^\circ$ |
| d Non è possibile rispondere ma gli angoli α e β sono complementari |



- 4** In figura sono rappresentati due triangoli rettangoli. Sapendo che l'angolo α ha un'ampiezza di 50° , qual è l'ampiezza dell'angolo β ?

- | | | |
|--|----------------------|----------------------|
| a 90° | b 130° | c 140° |
| d Non è possibile rispondere perché è necessario conoscere almeno un altro angolo interno | | |



Esercizi per il recupero

- 1** Sulla diagonale AC di un parallelogramma $ABCD$ considera due punti E e F tali che sia $AE \cong FC$. Dimostra che il quadrilatero $EBFD$ è un parallelogramma.
- 2** Dai vertici opposti A e C del parallelogramma $ABCD$ conduci le perpendicolari alla diagonale BD e siano rispettivamente E e F i piedi di tali perpendicolari. Dimostra che il quadrilatero $AECF$ è un parallelogramma.
- 3** Dimostra che congiungendo i punti medi dei lati di un parallelogramma si ottiene un parallelogramma.
- 4** Il parallelogramma $ABCD$ ha la diagonale BD congruente al lato AB ; la diagonale BD forma, con il lato AD , un angolo di ampiezza 60° . Dimostra che $ABCD$ è un rombo.
- 5** Dimostra che in un trapezio isoscele gli angoli opposti sono supplementari.
- 6** Dato un triangolo ABC traccia da B la parallela al lato AC e da C la parallela ad AB e sia D il loro punto di intersezione.
 - a. Spiega perché $ABDC$ è un parallelogramma.
 - b. In quale caso $ABDC$ è un rombo?
 - c. In quale caso $ABDC$ è un rettangolo?
- 7** Dato un triangolo ABC , prolunga il lato AB di un segmento AD e il lato AC di un segmento AE .
 - a. Come devono essere AD e AE affinché $BCDE$ sia un parallelogramma? $[AD \cong AB \text{ e } AE \cong AC]$
 - b. In quale caso si ottiene un rettangolo? $[se\ ABC\ \text{è isoscele con base } BC]$
 - c. In quale caso si ottiene un rombo? $[se\ ABC\ \text{è rettangolo in } A]$
- 8** Da ciascun vertice del triangolo ABC traccia la parallela al lato opposto. Queste tre parallele si intersecano nei punti P , Q e R .
 - a. Spiega perché $ABCQ$ e $ABPC$ sono parallelogrammi.
 - b. Perché si può dire che $PC \cong CQ$?
 - c. Spiega perché si può affermare che i segmenti AP , BQ , CR intersecano i lati di ABC nei loro punti medi.
- 9** Il trapezio rettangolo $ABCD$ ha il lato AD , perpendicolare alle basi, congruente alla base minore CD , ed è $AB \cong 2CD$. Calcola le ampiezze degli angoli del trapezio. Dimostra poi che
 - a. il punto K , in cui si incontrano BD e l'altezza CH , è il punto medio sia di BD sia di CH ;
 - b. il punto M , in cui si incontrano AC e DH , è il punto medio sia di AC sia di DH ;
 - c. KM è parallelo a CD e congruente alla sua metà. $[le\ ampiezze\ sono\ 90^\circ,\ 45^\circ,\ 135^\circ,\ 90^\circ]$
- 10** Sono date due rette parallele a e b , tagliate da una trasversale r rispettivamente nei punti A e B . Prendi su a e b , da una stessa parte rispetto a r , due segmenti AA' e BB' congruenti tra loro. Dimostra che il quadrilatero $AA'B'B$ è un parallelogramma.
- 11** Dato il triangolo ABC prolunga il lato AB , dalla parte di A , di un segmento $AD \cong AB$ e il lato AC , dalla parte di A , di un segmento $AE \cong AC$. Dimostra che il quadrilatero $BCDE$ è un parallelogramma.

Esercizi di approfondimento

- 1** Dai vertici A , B , C , D di un parallelogramma traccia, esternamente al parallelogramma, le rette a , b , c , d in modo che ciascuna formi un angolo di ampiezza α rispettivamente con i lati AB , BC , CD , DA . Dimostra che i quattro punti A' , B' , C' , D' in cui tali rette si incontrano sono vertici di un parallelogramma. Dimostra inoltre che
 - a. se $ABCD$ è un rettangolo, allora $A'B'C'D'$ è un rettangolo;
 - b. se $ABCD$ è un rombo, allora $A'B'C'D'$ è un rombo.

- 2** Sono dati i due angoli adiacenti \widehat{XOY} e \widehat{XOZ} e le loro bisettrici rispettive OM e ON . Da un punto qualunque A della semiretta OX conduci le perpendicolari a OM e a ON , che tagliano le rette OY e OZ in B e in C e le rette OM e DN in E e D . Dimostra che
- l'angolo \widehat{BAC} è retto;
 - i due triangoli OAB e OAC sono isosceli;
 - O è il punto medio di BC ;
 - il quadrilatero $CDEB$ è un trapezio.
- 3** Dimostra che in un triangolo i punti medi dei lati e il piede di un'altezza sono vertici di un trapezio isoscele.
- 4** Sia ABC un triangolo scaleno di base BC . Siano D il punto simmetrico di B rispetto ad A ed E il simmetrico di C sempre rispetto ad A . Classifica il quadrilatero $BCDE$ e giustifica la risposta. Rispondi allo stesso quesito nel caso in cui ABC sia un triangolo rettangolo in A , oppure sia rettangolo in A e isoscele.
- 5** Nel parallelogramma $ABCD$, la diagonale AC è congruente al lato AB . Congiungi il vertice A con il punto medio M del lato BC e prolunga AM di un segmento $ME \cong AM$. Dimostra che
- AM e BC sono perpendicolari;
 - il punto E è sul prolungamento di DC ;
 - il punto C è il punto medio di DE .
- Classifica poi il quadrilatero $ABEC$.
- 6** Due rette parallele AB e CD sono tagliate da una trasversale nei punti M , N . Conduci le bisettrici delle due coppie di angoli coniugati interni; queste bisettrici si tagliano in P e in Q .
- Di che natura è il quadrilatero $MPNQ$?
 - Come sono i segmenti MN e PQ ?
 - Qual è la direzione di PQ ?
 - Il quadrilatero $MPNQ$ può essere un quadrato?
- 7** È dato il quadrato $ABCD$. Su CD e internamente al quadrato costruisci il triangolo equilatero CDE . Su BC e all'esterno del quadrato costruisci il triangolo equilatero BFC . Su AD come ipotenusa costruisci, esternamente al quadrato, il triangolo rettangolo isoscele AGD .
- Dimostra che i punti A , E , F sono allineati. (Suggerimento: conviene determinare le ampiezze degli angoli del triangolo AED ...)
 - Dimostra che i punti G e F e il punto O di intersezione delle diagonali del quadrato sono allineati.

QUESITI A RISPOSTA MULTIPLA

- 2** Nella foto a fianco vedi un pavimento realizzato con piastrelle di due tipi diversi: le piastrelle chiare sono quadrate, quelle scure sono dei rombi. Per realizzare una pavimentazione di questo tipo è necessario che gli angoli interni dei rombi siano
- 45° e 135°
 - 60° e 120°
 - una qualunque coppia di angoli supplementari
 - una qualunque coppia di angoli complementari



Verso la Prova Invalsi

Soluzioni degli esercizi



- 1** Durante l'ora di disegno Beatrice deve tracciare la parallela a una retta r passante per un punto P assegnato. Beatrice ha con sé riga e compasso, ma ha dimenticato la squadra. Andrea le suggerisce la seguente costruzione, che puoi seguire guardando la figura a lato.

Segna un punto A qualsiasi sulla retta r . Punta il compasso in A e con apertura AP traccia un arco che incontra la retta r nel punto B . Quindi, sempre con la stessa apertura, traccia due archi puntando il compasso prima in B e poi in P e segna il punto Q in cui si intersecano. Ora puoi tracciare la retta PQ che è la parallela che dovevi disegnare.

Spiega perché con la costruzione indicata da Andrea si ottiene effettivamente la parallela a r passante per P .

